نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: آزمون ۸۱ نامعادلات و تعیین علامت

مدت زمان آزمون: --

مرکز مشاوره تحصیلی راه روشن

۱) اگر جواب نامعادله $x(x^۲ - x - ۸) + ۱۲ > ۰$ به صورت $(a, +\infty) - \{b\}$ باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\underbrace{x^۳ - x^۲ - ۸x + ۱۲}_{f(x)} > ۰ \xrightarrow[\text{بر}\ x-۲\ \text{بخشپذیراست}]{f(۲)=۰}$$

$$(x-۲)(x^۲ + x - ۶) > ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲(x+۳) > ۰$$

حال برای تعیین علامت آن داریم:

x		-۳		۲	
$(x-۲)^۲(x+۳)$	$-$	۰	$+$	۰	$+$

$$\Rightarrow b - a = ۲ - (-۳) = ۵$$

۲) اگر مجموعه جواب نامعادله $(a+۲)x^۲ + (b+۳)x + ۴b \geq ۰$ برابر $[۲, +\infty)$ باشد، آن‌گاه مجموعه جواب نامعادله $ax + b \leq ۰$ کدام است؟

۱) $[-۲, +\infty)$
۲) $(-\infty, -۲]$
۳) $[-\frac{۱}{۲}, +\infty)$
۴) $(-\infty, -\frac{۱}{۲}]$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به جواب نامعادله، عبارت درجه اول می‌باشد (چرا؟)، پس $a = -۲$ و $x = ۲$ ریشه عبارت است. داریم:

$$\xrightarrow{x=۲} (b+۳)(۲) + ۴b = ۰ \Rightarrow b = -۱$$

$$ax + b \leq ۰ \xrightarrow[b=-۱]{a=-۲} -۲x - ۱ \leq ۰ \Rightarrow x \geq -\frac{۱}{۲}$$

۳) اگر به‌ازای همه مقادیر x، نامساوی $((۱-m)x^{۲}-۲x-۱-m)(x^{۲}-۲x+۳)<۰$ برقرار باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $(۱, +\infty)$
۲) $(-\sqrt{۲}, \sqrt{۲})$
۳) $(\sqrt{۲}, +\infty)$
۴) $(-\infty, -\sqrt{۲})$

پاسخ: گزینه ۳

$$((۱-m)x^{۲}-۲x-۱-m)(x^{۲}-۲x+۳)<۰$$

برای عبارت درجه دوم $x^{۲}-۲x+۳$ داریم:

$$\Delta = b^{۲}-۴ac=(-۲)^{۲}-۴(۱)(۳)=-۸<۰$$

چون $\Delta<۰$ و ضریب $x^{۲}$ مثبت است، پس همواره $x^{۲}-۲x+۳>۰$ است.

$$\Rightarrow (۱-m)x^{۲}-۲x-۱-m<۰$$

برای این‌که عبارت درجه دوم فوق همواره منفی باشد، باید، $\Delta<۰$ و ضریب $x^{۲}$ منفی باشد.

$$۱-m<۰ \Rightarrow m>۱ \qquad (۱)$$

$$\Delta<۰ \Rightarrow b^{۲}-۴ac<۰ \Rightarrow (-۲)^{۲}+۴(۱-m)(۱+m)<۰$$

$$\Rightarrow ۴+۴-۴m^{۲}<۰ \Rightarrow ۸-۴m^{۲}<۰ \Rightarrow ۴(۲-m^{۲})<۰$$

$$\Rightarrow ۲-m^{۲}=۰ \Rightarrow m^{۲}=۲ \Rightarrow m=\pm\sqrt{۲}$$

m		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$2-m^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow m\in(-\infty,-\sqrt{۲})\cup(\sqrt{۲},+\infty) \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (۱) ، (۲)}} m>\sqrt{۲}$$

۴) اگر جدول تعیین علامت عبارت $P=(۲x-۱)(ax^۲+۳x+b)$ به‌صورت

x		-2		c	
P	−	∘	+	∘	+

باشد، حاصل abc کدام است؟

۱) ۲-
۲) ۲
۳) ۸
۴) ۸-

پاسخ: گزینه ۱

چون در دو طرف $x=-۲$ تغییر علامت وجود دارد، پس $x=-۲$ ریشه ساده عبارت P است و باید عبارت $ax^۲+۳x+b$ را صفر کند. همچنین چون در دو طرف $x=c$ تغییر علامتی وجود ندارد پس ریشه مضاعف عبارت P است و باید ریشه عبارت $ax^۲+۳x+b$ با ریشه عبارت $۲x-۱$ یعنی $x=\frac{۱}{۲}$ یکسان باشد. پس $x=\frac{۱}{۲}$ نیز باید عبارت $ax^۲+۳x+b$ را صفر کند.

$$۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}=c$$

$$ax^۲+۳x+b=۰\begin{cases}\xrightarrow{x=-۲} ۴a+b=۶\\ \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۴}a+b=-\frac{۳}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{از حل دستگاه}}\begin{cases}a=۲\\ b=-۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow abc=(۲)(-۲)(\tfrac{۱}{۲})=-۲$$

۵) اگر مجموعه جواب‌های نامعادله $|۲x-\frac{x+a}{۳}|<x$ با مجموعه جواب‌های نامعادله $|x-\frac{۵}{۴}|<b$ برابر باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳

$$|۲x-\frac{x+a}{۳}|<x\Rightarrow|\frac{۵x-a}{۳}|<x\Rightarrow|۵x-a|<۳x$$

$$\Rightarrow -3x<5x-a<3x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-3x<5x-a\Rightarrow 8x>a\Rightarrow x>\frac{a}{8}\\ 5x-a<3x\Rightarrow 2x<a\Rightarrow x<\frac{a}{2}\end{cases}$$

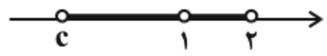
$$\xrightarrow{a>۰}\frac{a}{۸}<x<\frac{a}{۲}\quad(۱)$$

$$|x-\frac{۵}{۴}|<b\xrightarrow{b>۰}-b<x-\frac{۵}{۴}<b$$

$$\Rightarrow -b+\frac{۵}{۴}<x<b+\frac{۵}{۴}\quad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\begin{cases}\frac{a}{۸}=-b+\frac{۵}{۴}\\ \frac{a}{۲}=b+\frac{۵}{۴}\end{cases}\Rightarrow a=۴, b=\frac{۳}{۴}$$

۶) نمایش هندسی مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^۲+x+a}{bx^۲+۲x+b} > ۰$ به‌صورت زیر است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۶
۳) ۸-
۴) ۱۰-

پاسخ: گزینه ۴

از آنجا که قبل و بعد $x=۱$، جزء مجموعه جواب است، می‌توان گفت که در $x=۱$ علامت عبارت $\frac{x^۲+x+a}{bx^۲+۲x+b}$ تغییر نکرده است. پس $x=۱$ ریشه مضاعف صورت یا مخرج است. در صورتی که عبارت $x^۲+x+a$ دارای ریشه مضاعف باشد، این ریشه $\frac{-۱}{۲}$ است، لذا $x=۱$ ریشه مضاعف مخرج کسر است.

$$\Rightarrow ۲b+۲=۰ \Rightarrow b=-۱$$

نامعادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{x^۲+x+a}{-(x-۱)^۲} > ۰ \Rightarrow \frac{x^۲+x+a}{(x-۱)^۲} < ۰$$

$x=۲$ ریشه صورت کسر است و داریم:

$$۴+۲+a=۰ \Rightarrow a=-۶$$

حال پاسخ نامعادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x^۲+x-۶}{(x-۱)^۲} < ۰ \Rightarrow \frac{(x-۲)(x+۳)}{(x-۱)^۲} < ۰ \Rightarrow$$

$$\text{جواب} = (-۳,۲)-\{۱\}$$

پس c هم برابر ۳- است.

$$a+b+c=-۶-۱-۳=-۱۰$$

۷ نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ax - ۲$ در بازه $(-\infty, -۲) \cup (b, +\infty)$ از نمودار تابع $g(x) = ۲x + ۴$ بالاتر است. $a + b$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۱
۳) ۴
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

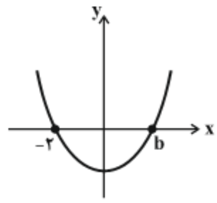
گزینه «۳»

نمودار تابع $f(x)$ از نمودار تابع $g(x)$ بالاتر است، یعنی:

$f(x) > g(x) \Rightarrow x^۲ + ax - ۲ > ۲x + ۴ \Rightarrow x^۲ + (a - ۲)x - ۶ > ۰$

حال می‌توان گفت جواب نامعادله $x^۲ + (a - ۲)x - ۶ > ۰$ به‌صورت $(-\infty, -۲) \cup (b, +\infty)$ می‌باشد.

بنابراین با توجه به رسم نمودار $y = x^۲ + (a - ۲)x - ۶$، به کمک بازه داده شده می‌توان نتیجه گرفت، جواب‌های معادله $x^۲ + (a - ۲)x - ۶ = ۰$، b و -۲ می‌باشند.



$(-۲)^۲ + (a - ۲)(-۲) - ۶ = ۰ \Rightarrow -۲a + ۲ = ۰ \Rightarrow a = ۱$

$\Rightarrow$ معادله : $x^۲ - x - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ x = ۳ \end{cases}$

جواب دیگر معادله $b = ۳$ است.

$\Rightarrow a + b = ۱ + ۳ = ۴$

۸) نمودار تابع $f(x) = \left|\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲+۴x+۳}\right|$ در بازه $(a,+\infty)$ پایین‌تر از خط $y = ۱$ قرار دارد. کم‌ترین مقدار a کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{-۱}{۷}$
۳) -۱
۴) -۷

پاسخ: گزینه ۲

مجموعه جواب نامعادله $f(x) < ۱$ بازه‌ای است که نمودار $f(x)$ پایین‌تر از خط $y = ۱$ قرار دارد.

$$f(x) < ۱ \Rightarrow \left|\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲+۴x+۳}\right| < ۱$$

$$\Rightarrow \left|\underbrace{x^۲ - ۳x + ۲}_{A}\right| < \left|\underbrace{x^۲ + ۴x + ۳}_{B}\right|$$

یادتان باشد برای حل نامعادله $|A| < |B|$ می‌توان به فرم زیر عمل کرد:

$$|A| < |B| \xrightarrow{2} A^۲ < B^۲ \Rightarrow A^۲ - B^۲ < ۰$$

$$(x \neq -۱, -۳)$$

$$\Rightarrow (A - B)(A + B) < ۰$$

پس: $(-۷x - ۱)\underbrace{(۲x^۲ + x + ۵)}_{\text{همواره مثبت}\begin{cases}\Delta<۰ \\ \text{ضریب } x^۲\end{cases}} < ۰ \Rightarrow -۷x - ۱ < ۰ \Rightarrow x > -\frac{۱}{۷}$

$$(x \neq -۱, -۳)$$

در نتیجه کم‌ترین مقدار a برابر $(-\frac{۱}{۷})$ است.

۹) اگر $a \leq m \leq b$ بزرگ‌ترین بازه برای m باشد که به ازای آن، عبارت $A = x^۲ + ۲mx + x + ۱$ تغییر علامت ندهد، حاصل ab کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $-\frac{۳}{۴}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

عبارت $ax^۲ + bx + c$ به ازای $\Delta \leq ۰$ هیچ‌گاه تغییر علامت نمی‌دهد.

$$A = x^۲ + (۲m + ۱)x + ۱$$

$$\Delta = (۲m + ۱)^۲ - ۴ \times ۱ \times ۱ \leq ۰ \Rightarrow ۴m^۲ + ۴m + ۱ - ۴ \leq ۰$$

$$\Rightarrow ۴m^۲ + ۴m - ۳ < ۰ \Rightarrow ۴(m + \frac{۳}{۲})(m - \frac{۱}{۲}) \leq ۰ \Rightarrow -\frac{۳}{۲} \leq m \leq \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{۳}{۲} \\ b = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow a \times b = -\frac{۳}{۴}$$

۱۰) بزرگ‌ترین مجموعه جواب نامعادله $\left|1-\left|\frac{1-|x|}{2}\right|\right| \leq 2$ کدام است؟

۱) $x \in [-7, 7]$

۲) $x \in [-3, 1]$

۳) $x \in [-5, 5]$

۴) $x \in [1, 3]$

پاسخ: گزینه ۱

$$\left|1-\left|\frac{1-|x|}{2}\right|\right| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 1-\left|\frac{1-|x|}{2}\right| \leq 2$$

$$\Rightarrow -3 \leq -\left|\frac{1-|x|}{2}\right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \left|\frac{1-|x|}{2}\right| \leq 3$$

$$\Rightarrow -2 \leq |1-|x|| \leq 6 \xrightarrow{|1-|x||\geq 0} |1-|x|| \leq 6 \Rightarrow -6 \leq 1-|x| \leq 6$$

$$\Rightarrow -7 \leq -|x| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq |x| \leq 7 \xrightarrow{|x|\geq 0} |x| \leq 7 \Rightarrow x \in [-7, 7]$$

۱۱) اگر هر دو عبارت $A = (2x+1)(x-4)$ و $B = \frac{(b^2-x)(2x+1)}{ax+b}$ جدول تعیین علامت کاملاً یکسانی داشته باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲

۲) -۲

۳) ۴

۴) -۴

پاسخ: گزینه ۲

چون عبارت A در همه نقاط تعریف شده است، پس باید مخرج کسر B فاقد ریشه باشد، تا عبارت B هم در همه نقاط تعریف شود یعنی:

$$B = \frac{(b^2-x)(2x+1)}{(ax+b)} \xrightarrow{a=0 \ (1)} B = \frac{(b^2-x)(2x+1)}{b} = 0$$

$$\Rightarrow x = b^2 \ , \ x = -\frac{1}{2}$$

از طرفی:

$$A = (2x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \ , \ x = 4$$

چون هر دو عبارت A و B باید ریشه‌های یکسانی داشته باشند:

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

اما برای $b = 2$ علامت عبارت B در همه فاصله‌ها خلاف علامت عبارت A می‌شود پس:

$$b = -2 \ (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\ ,\ (2)} a+b = -2$$

۱۲ به ازای چه حدودی از m عبارت $\frac{(m+۲)x^۲+۲mx+m-۱}{-x^۲+۳x-۴}$ همواره منفی است؟

۱) $-۲ < m$

۲) $-۲ < m < ۲$

۳) $۲ < m$

۴) $m < ۲$

پاسخ: گزینه ۳

عبارت مخرج کسر همواره منفی است، زیرا در معادله آن $\Delta < ۰$ و ضریب $x^۲$، منفی است.

$$\Delta_{\text{مخرج}} = ۳^۲ - ۴ \times (-۴) \times (-۱) = ۹ - ۱۶ = -۷ < ۰$$

$-۱ < ۰$: ضریب $x^۲$ در مخرج کسر

برای آن‌که مقدار کسر، همواره منفی باشد، باید عبارت صورت کسر همواره مثبت باشد، پس:

(۱) $m + ۲ > ۰ \Rightarrow x > -۲$: ضریب $x^۲$ در صورت کسر

$$\Delta < ۰ \Rightarrow (۲m)^۲ - ۴(m-۱) \times (m+۲) < ۰ \Rightarrow ۴m^۲ - ۴m^۲ - ۴m + ۸ < ۰$$

$$\Rightarrow ۸ < ۴m \Rightarrow ۲ < m \quad (۲) \quad \xrightarrow{\text{اشتراک (۱) و (۲)}} ۲ < m$$

۱۳) اگر جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=\frac{bx(x-a)^2}{ax^2+bx+c}$ به صورت زیر باشد، آنگاه مجموعه مقادیر ممکن برای b کدام است؟

x		−۱		۰		۲	
P(x)	+	ت ن	+	۰	−	۰	−

x		−۱		۰		۲	
P(x)	+	ت ن	+	۰	−	۰	−

۱) { }
۲) {۴}
۳) {−۴}
۴) {۴, −۴}

پاسخ: گزینه ۱

x		−۱		۰		۲	
P(x)	+	ت ن	+	۰	−	۰	−

از جدول تعیین علامت چنین برداشت می‌شود که ۰ و ۲ ریشه‌های صورت کسر و ۱− ریشه مضاعف مخرج کسر $P(x)$ باشد، در نتیجه Δدر مخرج کسر صفر است. پس:

$$\begin{cases} a=2 \\ a-b+c=0 \\ \triangle=b^2-4ac=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b-2\,(*) \\ b^2-8c=0 \end{cases} \Rightarrow b^2-8b+16=0$$

$$\Rightarrow (b-4)^2=0 \Rightarrow b=4 \xrightarrow{(*)} c=2$$

$$\Rightarrow P(x)=\frac{4x(x-2)^2}{2(x+1)^2}$$

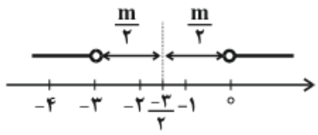
در نتیجه به ازای $x>0$، حاصل عبارت مثبت و به ازای $x<0$، حاصل عبارت منفی است، پس علامت $P(x)$ بدست آمده مغایر با علامت‌های مندرج در جدول تعیین علامت است. پس مقداری برای b وجود ندارد

۱۴) مجموعه جواب‌های نامعادله $|۲x+۳| > m$، چهار عدد صحیح را شامل نمی‌شود. حداقل مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$
۲) ۳
۳) $\frac{۹}{۲}$
۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲

برای حل نامعادله $|x+\frac{۳}{۲}| > \frac{m}{۲}$، باید نقاطی مانند x را روی محور پیدا کنیم که فاصله آن‌ها از نقطه $x=-\frac{۳}{۲}$، بزرگ‌تر از $\frac{m}{۲}$ باشد:



$x < \frac{-۳}{۲} - \frac{m}{۲}$ یا $x > -\frac{۳}{۲} + \frac{m}{۲}$

$\Rightarrow ۰ \le -\frac{۳}{۲} + \frac{m}{۲} < ۱ \Rightarrow ۳ \le m < ۵$

۱۵) مجموعه جواب‌های حقیقی نامعادله $x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ > \frac{۳}{۲}x(x-۱)^۲$، کدام است؟

۱) $\{x:\ x > -۳\}$
۲) $\{x:\ x < -۱\}$
۳) $\{x:\ x < -۲\}$
۴) $\{x:\ -۳ < x < -۱\}$

پاسخ: گزینه ۳

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ > \frac{۳}{۲}x(x-۱)^۲ \Rightarrow (x-۱)^۳ > \frac{۳}{۲}x(x-۱)^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}x(x-۱)^۲ - (x-۱)^۳ < ۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲\left(\frac{۳}{۲}x - (x-۱)\right) < ۰ \Rightarrow P = (x-۱)^۲\left(\frac{۱}{۲}x + ۱\right) < ۰$$

معادله $P=۰$ دارای ریشه ساده ۲- و ریشه مضاعف ۱ است، بنابراین در $x=-۲$ تغییر علامت داریم و در $x=۱$ تغییر علامت نداریم، و جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
P		$-$	۰	$+$	۰	$+$	

پس مجموعه جواب برابر $\{x:\ x < -۲\}$ است

۱۶) مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{۲x-۳}{x+۲}\right| \leq ۲$ به‌صورت $[a, +\infty)$ است. a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۸}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۷}{۸}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{|۲x-۳|}{|x+۲|} \leq ۲ \xrightarrow{x \neq -۲} |۲x-۳| \leq ۲|x+۲| \xrightarrow{\text{به توان۲}}$$

$$(۲x-۳)^۲ \leq ۴(x+۲)^۲ \Rightarrow ۴x^۲ + ۹ - ۱۲x \leq ۴x^۲ + ۱۶x + ۱۶$$

$$\Rightarrow -۲۸x \leq ۷ \Rightarrow x \geq -\frac{۱}{۴} \Rightarrow x \in [-\frac{۱}{۴}, +\infty) \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

۱۷) اگر مقدار عبارت $\frac{ax+۳}{۲x-b}$ تنها در فاصله $-\frac{۱}{۳} < x < ۲$ کمتر از صفر باشد، حاصل ab کدام است؟ $(a, b > ۰)$

۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۴۸
۴) ۳۶

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$ax + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۳}{a} \quad , \quad ۲x - b = ۰ \Rightarrow x = \frac{b}{۲}$$

با توجه به اینکه a و b هر دو عددهای بزرگ‌تر از صفر هستند، نتیجه می‌گیریم:

$$-\frac{۳}{a} < ۰ \ , \ \frac{b}{۲} > ۰$$

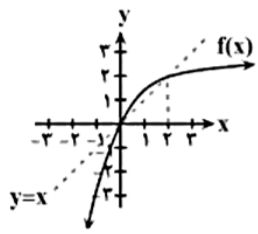
اکنون با توجه به اینکه مقدار عبارت mx+n به ازای $x < -\frac{n}{m}$ مخالف علامت m و به ازای $x > \frac{-n}{m}$ موافق علامت m است،جدول تعیین علامت عبارت داده شده را رسم می کنیم:

	$(x < \frac{-۳}{a})$	$-\frac{۳}{a}$	$(\frac{-۳}{a} < x < \frac{b}{۲})$	$\frac{b}{۲}$	$(x > \frac{b}{۲})$
$ax+۳$	−	۰	+		+
$۲x-b$	−		−	۰	+
$\frac{ax+۳}{۲x-b}$	+	۰	−	ن	+

حالا همانطور که در جدول مشخص است، مقدار عبارت مورد نظر تنها در بازه $-\frac{۳}{a} < x < \frac{b}{۲}$ کمتر از صفر است، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} -\frac{۳}{a} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow a = ۹ \\ \frac{b}{۲} = ۲ \Rightarrow b = ۴ \end{cases} \Rightarrow ab = ۳۶$$

۱۸) مجموعه جواب نامعادله $xf(x) - x^۲ < ۰$ به کدام صورت است؟



۱) $(-\infty, ۰)$

۲) $(۰, ۲)$

۳) $(۲, +\infty)$

۴) $(-\infty, ۰) \cup (۲, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$xf(x) - x^۲ < ۰ \Rightarrow x(f(x) - x) < ۰$$

مطابق شکل در فاصله $(۰, ۲)$ تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد یعنی $f(x) - x > ۰$ و در فاصله $(-\infty, ۰) \cup (۲, +\infty)$ پایین خط $y = x$ قرار دارد یعنی $f(x) - x < ۰$ می‌شود.

		۰		۲	
x	−	۰	+		+
f(x) − x	−	۰	+	۰	−
x(f(x) − x)	+	۰	+	۰	−

$\Rightarrow x \in (۲, +\infty)$

۱۹) مجموعه جواب نامعادله $(-x^۲ + ax + b)(x + ۱) \geq ۰$ به صورت $(-\infty \ , \ ۱]$ است. $a - b$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۱-

۳) $-\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

جدول تعیین علامت $x + ۱$:

x		−۱	
x + ۱	−	۰	+

با توجه به جدول تعیین علامت $x + ۱$، عبارت $(-x^۲ + ax + b)$ نمی‌تواند فاقد ریشه باشد، چون در غیر این صورت نامعادله $(-x^۲ + ax + b)(x + ۱) \geq ۰$ در $(-\infty \ , \ ۱]$ برقرار نخواهد بود. با توجه به نامساوی داده شده، نتیجه می‌گیریم که عبارت $(-x^۲ + ax + b)$ در بازه $(-۱ \ , \ ۱)$ علامت مثبت و در بازه‌های $(-\infty \ , \ -۱)$ و $(۱ \ , \ +\infty)$ علامت منفی دارد و این یعنی $x = ۱$ و $x = -۱$ ریشه‌های آن هستند، پس:

$$-x^۲ + ax + b = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow -۱ + a + b = ۰ \\ x = -۱ \Rightarrow -۱ - a + b = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = ۰ \ , \ \ b = ۱ \Rightarrow a - b = -۱$$

۲۰) مجموعه جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{۴x+۱}{۳x-۱}\right| < x-۱$ کدام است؟

۱) $x > \frac{۸}{۳}$
۲) $x < \frac{۸}{۳}$
۳) $x > ۱$
۴) $x > \frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\left|\frac{۴x+۱}{۳x-۱}\right| < x-۱ \xrightarrow[x>۱]{x-۱>۰} \begin{cases} ۴x+۱>۰ \\ ۳x-۱>۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{۴x+۱}{۳x-۱}\right| = \frac{۴x+۱}{۳x-۱} \Rightarrow \frac{۴x+۱}{۳x-۱} < x-۱$$

$$\Rightarrow ۴x+۱ < ۳x^۲ - ۳x - x + ۱ \Rightarrow ۴x < ۳x^۲ - ۴x$$

$$\begin{cases} x > \frac{۸}{۳} \\ \text{یا} \xrightarrow{x>۱} x > \frac{۸}{۳} \\ x < ۰ \end{cases}$$

۲۱) مجموعه جواب نامعادله‌ی $|۱-x| - ۲|x| > x+۲$ به کدام صورت است؟

۱) $\varnothing$
۲) R
۳) $(-\infty, \frac{-۳}{۲})$
۴) $(-\infty, \frac{-۱}{۴})$

پاسخ: گزینه ۱

$$x \geq ۱ \Rightarrow -(۱-x) - ۲x > x+۲ \Rightarrow x-۱-۲x > x+۲$$

$$\Rightarrow -۲x > ۳ \Rightarrow x < \frac{-۳}{۲}$$

اما این جواب با شرط $x \geq ۱$ همخوانی ندارد، پس قابل قبول نیست.

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow ۱-x-۲x > x+۲ \Rightarrow -۴x > ۱ \Rightarrow x < \frac{-۱}{۴}$$

این جواب با شرط $۰ \leq x < ۱$ همخوانی ندارد، پس قابل قبول نیست.

$$x < ۰ \Rightarrow ۱-x+۲x > x+۲ \Rightarrow ۱+x > x+۲ \Rightarrow ۱ > ۲$$

با شرط $x < ۰$ به رابطه $۱ > ۲$ رسیدیم که امکان پذیر نیست.

بنابراین نامعادله داده شده جواب نخواهد داشت.

۲۲) مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{\sqrt[3]{1-x^2} \times \sqrt{x^2-2x+1}}{|x|+1} < 0$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

$$\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$$

با توجه به وجود قدرمطلق مشخص است، عبارت $|x-1|$ همواره نامنفی است.

$|x|$ عبارتی همواره نامنفی است و اگر با عدد ۱ جمع شود نیز مثبت خواهد بود، پس $|x|+1$ همواره مثبت است.

بنابراین علامت کسر مورد نظر به علامت عبارت $\sqrt[3]{1-x^2}$ بستگی دارد و برای آن‌که کل کسر کوچکتر از صفر باشد، باید:

$$\sqrt[3]{1-x^2} < 0$$

می‌دانیم اعداد منفی ریشه سوم دارند به عبارتی در زیر رادیکال با فرجه فرد می‌توان اعداد منفی قرار داد، در نتیجه برای منفی شدن عبارت $\sqrt[3]{1-x^2}$ کافی است:

$$1-x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

این بازه شامل سه عدد صحیح نیست که عبارتند از: $\{1, 0, -1\}$.

۲۳) نامعادله‌ی $\frac{2x-9}{|x^2+1|} < -1$ در کدام بازه، برقرار است؟

۱) $(2, 6)$
۲) $(-4, 2)$
۳) $(-2, 4)$
۴) $(-1, 5)$

پاسخ: گزینه ۳

عبارت x^2+1 همواره مثبت است بنابراین از قدرمطلق خارج می‌شود و آن را در دو سمت نامعادله ضرب می‌کنیم:

$$2x-9 < -x^2-1 \Rightarrow x^2+2x-8 < 0$$
$$\Rightarrow (x+4)(x-2) < 0$$
$$\Rightarrow -4 < x < 2 \Rightarrow x \in (-4, 2)$$

۲۴) مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{|۲-۳x|+|۲x+۳|}{۲x^۲+۸x+۱۵} < ۰$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) بی شمار
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

$$y = ۲x^۲ + ۸x + ۱۵ \Rightarrow \Delta = ۸^۲ - ۴ \times ۲ \times ۱۵ = ۶۴ - ۱۲۰ = -۵۶ < ۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ + ۸x + ۱۵ > ۰ \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{|۲-۳x|+|۲x+۳|}{۲x^۲+۸x+۱۵} < ۰ \xrightarrow{(*)} |۲ - ۳x| + |۲x + ۳| < ۰$$

مجموع دو عبارت قدرمطلقی همواره نامنفی است و هیچ‌گاه نمی تواند منفی باشد. پس مسأله جوابی نخواهد داشت.

۲۵) نمودار $y = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}$ در بازه‌ی $(-\infty, a)$ بالاتر از نمودار $y = |x|$ قرار دارد، بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

نمودار $y = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}$ بالاتر از نمودار $y = |x|$ قرار دارد، یعنی:

$$\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴} > |x| \Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲} > |x| \Rightarrow |x - ۲| > |x|$$

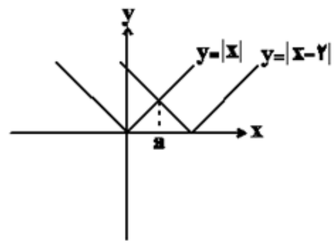
راه‌حل اول:

$$|x-۲| > |x| \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۲ \Rightarrow x - ۲ > x \Rightarrow -۲ > ۰ \text{ غ ق ق} \\ ۰ \leq x < ۲ \Rightarrow ۲ - x > x \Rightarrow x < ۱ \Rightarrow x \in [۰,۱) \\ x < ۰ \Rightarrow ۲ - x > -x \Rightarrow ۲ > ۰ \Rightarrow x \in (-\infty, ۰) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in [۰,۱) \cup (-\infty, ۰) \Rightarrow x \in (-\infty, ۱)$$

راه‌حل دوم:

برای به دست آوردن جواب نامعادله از روش رسم نمودار کمک می‌گیریم:



از روی شکل کاملاً مشخص است که نمودار $y = |x - ۲|$ در بازه‌ی $(-\infty, a)$، بالاتر از نمودار $y = |x|$ قرار دارد. برای یافتن مقدار a باید دو شاخه‌ی متقاطع مربوط از دو نمودار را مساوی هم قرار دهیم:

$$\begin{cases} y = |x| \Rightarrow y = x \\ y = |x - ۲| \Rightarrow y = -x + ۲ \end{cases} \Rightarrow x = -x + ۲ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow a = ۱$$