نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: آزمون B۲ نامعادلات و تعیین علامت

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۰/۱۲/۲۱

مدت زمان آزمون: --

مرکز مشاوره تحصیلی راه روشن

۱ اگر مجموعه جواب نامعادله $|mx+n|>۱۱$ ، به‌صورت $R-[-۵,۶]$ باشد، m-n کدام است؟ $(m>۰)$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

$|mx+n|>۱۱$

$$\Rightarrow \begin{cases} mx+n>۱۱ \Rightarrow mx>۱۱-n \xrightarrow{m>۰} x>\frac{۱۱-n}{m} & (۱) \\ mx+n<-۱۱ \Rightarrow mx<-۱۱-n \xrightarrow{m>۰} x<\frac{-۱۱-n}{m} & (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} x\in R-[\frac{-۱۱-n}{m}\,,\,\frac{۱۱-n}{m}]$$

از مقایسه با $R-[-۵\,,۶]$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{-۱۱-n}{m}=-۵ \Rightarrow ۵m-n=۱۱ \\ \frac{۱۱-n}{m}=۶ \Rightarrow ۶m+n=۱۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۱m=۲۲ \Rightarrow m=۲\,,\ n=-۱$$

$$\Rightarrow m-n=۳$$

۲) اگر به‌ازای همه مقادیر x، نامساوی $((۱-m)x^۲-۲x-۱-m)(x^۲-۲x+۳)<۰$ برقرار باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $(۱,+\infty)$
۲) $(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})$
۳) $(\sqrt{۲},+\infty)$
۴) $(-\infty,-\sqrt{۲})$

پاسخ: گزینه ۳

$$((۱-m)x^۲-۲x-۱-m))(x^۲-۲x+۳)<۰$$

برای عبارت درجه دوم $x^۲-۲x+۳$ داریم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲)^۲-۴(۱)(۳)=-۸<۰$$

چون $\Delta<۰$ و ضریب $x^۲$ مثبت است، پس همواره $x^۲-۲x+۳>۰$ است.

$$\Rightarrow (۱-m)x^۲-۲x-۱-m<۰$$

برای این‌که عبارت درجه دوم فوق همواره منفی باشد باید، $\Delta<۰$ و ضریب $x^۲$ منفی باشد.

$$۱-m<۰\Rightarrow m>۱ \qquad (۱)$$

$$\Delta<۰\Rightarrow b^۲-۴ac<۰\Rightarrow(-۲)^۲+۴(۱-m)(۱+m)<۰$$

$$\Rightarrow ۴+۴-۴m^۲<۰\Rightarrow ۸-۴m^۲<۰\Rightarrow ۴(۲-m^۲)<۰$$

$$\Rightarrow ۲-m^۲=۰\Rightarrow m^۲=۲\Rightarrow m=\pm\sqrt{۲}$$

m		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$2-m^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow m\in(-\infty,-\sqrt{۲})\cup(\sqrt{۲},+\infty) \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (۱) , (۲)}} m>\sqrt{۲}$$

۳) اگر مجموعه جواب نامعادله $(a+۲)x^۲+(b+۳)x+۴b\geq۰$ برابر $[۲,+\infty)$ باشد، آن‌گاه مجموعه جواب نامعادله $ax+b\leq۰$ کدام است؟

۱) $[-۲,+\infty)$
۲) $(-\infty,-۲]$
۳) $[-\frac{۱}{۲},+\infty)$
۴) $(-\infty,-\frac{۱}{۲}]$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به جواب نامعادله، عبارت درجه اول می‌باشد (چرا؟)، پس $a=-۲$ و $x=۲$ ریشه عبارت است. داریم:

$$\xrightarrow{x=۲}(b+۳)(۲)+۴b=۰\Rightarrow b=-۱$$

$$ax+b\leq۰\xrightarrow[b=-۱]{a=-۲}-۲x-۱\leq۰\Rightarrow x\geq-\frac{۱}{۲}$$

۴) چند عدد صحیح در نامعادله $۱ < \frac{۳x-۱}{۲x+۱} < ۲$ صدق نمی‌کند؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

نامعادله اصلی را به‌صورت دو نامعادله می‌نویسیم و سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$(۱)\ \frac{۳x-۱}{۲x+۱} > ۱ \Rightarrow \frac{۳x-۱}{۲x+۱} - ۱ > ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳x-۱-(۲x+۱)}{۲x+۱} > ۰ \Rightarrow \frac{x-۲}{۲x+۱} > ۰$$

x		$-\frac{1}{2}$		2	
$x-2$	−		−	0	+
$2x+1$	−	0	+		+
$\frac{x-2}{2x+1}$	+	ت ن	−	0	+

$x<-\frac{۱}{۲}$ یا $x>۲$: جواب (۱)

$$(۲)\ \frac{۳x-۱}{۲x+۱} < ۲ \Rightarrow \frac{۳x-۱-۲(۲x+۱)}{۲x+۱} < ۰ \Rightarrow \frac{-x-۳}{۲x+۱} < ۰ \Rightarrow \frac{x+۳}{۲x+۱} > ۰$$

x		-3		$-\frac{1}{2}$	
$x+3$	−	0	+		+
$2x+1$	−		−	0	+
$\frac{x+3}{2x+1}$	+	0	−	ت ن	+

$x>-\frac{۱}{۲}$ یا $x<-۳$: جواب (۲)

$\xrightarrow{\text{اشتراک (۱) و (۲)}} x<-۳$ یا $x>۲$

پس اعداد ۳- ، ۲- ، ۱- ، ۰ ، ۱ و ۲ یعنی ۶ عدد صحیح در این نامعادله صدق نمی‌کنند.

۵) مقدار x در کدام بازه زیر تغییر کند تا $P(x) = \frac{x^۳ - ۴x}{x^۲ - x + ۱}$، دقیقاً دو بار تغییر علامت دهد؟

۱) $[۱, ۱۰]$
۲) $[-۱, ۴]$
۳) $[-۴, ۳]$
۴) $[-۶, -۱]$

پاسخ: گزینه ۲

همواره برقرار است: $x^۲ - x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۱ - ۴ < ۰} x^۲ - x + ۱ > ۰$

$x^۳ - ۴x = x(x^۲ - ۴) = x(x - ۲)(x + ۲)$

x		−2		0		2	
$x^3 - 4x$	−	0	+	0	−	0	+
$x^2 - x + 1$	+		+		+		+
$P(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - x + 1}$	−	0	+	0	−	0	+

مطابق جدول تعیین علامت فوق، در بازه $[-۱, ۴]$، $P(x)$ دو بار (در $x = ۰$ و $x = ۲$) تغییر علامت می‌دهد.

در بازه $[-۴, ۳]$ ، $P(x)$، سه بار و در دو بازه $[۱, ۱۰]$, $[-۶, -۱]$ $P(x)$ یک بار تغییر علامت می‌دهد.

۶) به ازای چند مقدار صحیح برای m، نمودار سهمی $y = (m + ۲)x^۲ + ۲mx + ۱$ همواره زیر محور xها قرار می‌گیرد؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) صفر
۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

برای این که سهمی، زیر محورxها باشد باید $\Delta < ۰$ و $a < ۰$ باشد؛ یعنی:

$\Delta < ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac < ۰ \Rightarrow (۲m)^۲ - ۴(m + ۲)(۱) < ۰$

$\Rightarrow ۴m^۲ - ۴(m + ۲) < ۰ \Rightarrow ۴(m^۲ - m - ۲) < ۰ \Rightarrow m^۲ - m - ۲ < ۰$

$m^۲ - m - ۲ = ۰ \Rightarrow (m - ۲)(m + ۱) = ۰ \Rightarrow m = ۲$ یا $m = -۱$

$\left.\begin{array}{l} m^۲ - m - ۲ < ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۲ \text{ جواب نامعادله} \\ \text{از طرفی: } a < ۰ \Rightarrow m + ۲ < ۰ \Rightarrow m < -۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \emptyset$

از آن‌جا که اشتراک جواب‌های به دست آمده تهی است، به‌ازای هیچ مقدار صحیح m، سهمی داده شده زیر محور xها قرار نمی‌گیرد.

۷) اگر جدول تعیین علامت عبارت $P = (۲x - ۱)(ax^۲ + ۳x + b)$ به‌صورت

x		-2		c	
P	−	○	+	○	+

باشد، حاصل abc کدام است؟

۱) ۲-
۲) ۲
۳) ۸
۴) ۸-

پاسخ: گزینه ۱

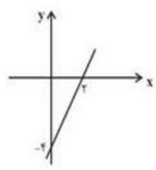
چون در دو طرف $x = -۲$ تغییر علامت وجود دارد، پس $x = -۲$ ریشه ساده عبارت P است و باید عبارت $ax^۲ + ۳x + b$ را صفر کند. همچنین چون در دو طرف $x = c$ تغییر علامتی وجود ندارد پس ریشه مضاعف عبارت P است و باید ریشه عبارت $ax^۲ + ۳x + b$ با ریشه عبارت $۲x - ۱$ یعنی $x = \frac{۱}{۲}$ یکسان باشد. پس $x = \frac{۱}{۲}$ نیز باید عبارت $ax^۲ + ۳x + b$ را صفر کند.

$۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} = c$

$$ax^۲ + ۳x + b = ۰ \begin{array}{l} \xrightarrow{x=-۲} ۴a + b = ۶ \\ \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۴}a + b = -\frac{۳}{۲} \end{array} \Bigg\} \xrightarrow{\text{از حل دستگاه}} \begin{cases} a = ۲ \\ b = -۲ \end{cases}$$

$\Rightarrow abc = (۲)(-۲)(\frac{۱}{۲}) = -۲$

۸) خط $y = ax + b$ در شکل زیر رسم شده است. عبارت $p(x) = \frac{ax+b}{bx+a}$ در کدام بازه نامنفی است؟



۱) $(\frac{۱}{۲}, ۲]$
۲) $(\frac{۱}{۳}, ۳]$
۳) $[\frac{۱}{۲}, ۲)$
۴) $[\frac{۱}{۳}, ۳)$

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به اینکه نقاط $(۰, -۴)$ و $(۲, ۰)$ روی خط مورد نظر قرار دارند، معادله خط به صورت $y = ۲x - ۴$ است و داریم:

$$p(x) = \frac{۲x-۴}{-۴x+۲} = \frac{x-۲}{-۲x+۱}$$

جدول تعیین علامت عبارت $p(x)$ به‌صورت زیر است:

		$\frac{۱}{۲}$		۲	
$x-۲$	−		−	○	+
$-۲x+۱$	+	○	−		−
$p(x)$	−	ت ن	+	○	−

$$\xrightarrow{p(x) \geq ۰} x \in (\frac{۱}{۲}, ۲]$$

۹) اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقادیر x که در نامعادله $|x^۲ - ۲x| \leq ۱$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۲
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

نکته: $u^۲ \leq a^۲ \Rightarrow |u| \leq a \Rightarrow -a \leq u \leq a$

با توجه به نکته بالا، می‌نویسیم:

$$|x^۲ - ۲x| \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x^۲ - ۲x \leq ۱$$

$$\xrightarrow{+۱} ۰ \leq x^۲ - ۲x + ۱ \leq ۲$$

$$\Rightarrow ۰ \leq (x-۱)^۲ \leq ۲ \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۱| \leq \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{۲} \leq x - ۱ \leq \sqrt{۲} \xrightarrow{+۱} \underbrace{۱-\sqrt{۲}}_{\text{min}} \leq x \leq \underbrace{\sqrt{۲}+۱}_{\text{max}}$$

درنتیجه: $\max\{x\} - \min\{x\} = (\sqrt{۲}+۱) - (۱-\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}$

۱۰) مجموعه جواب نامعادله $\frac{۳x^۲-۳x}{x^۳-۱} \geq ۱$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۳
۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا یک طرف نامعادله را صفر می‌کنیم:

$$\frac{۳x^۲-۳x}{x^۳-۱} - ۱ \geq ۰ \Rightarrow \frac{۳x^۲-۳x-x^۳+۱}{x^۳-۱} \geq ۰$$

$$\xrightarrow[\text{مرتب‌تر می‌نویسیم}]{\text{صورت کسر را}} \frac{-x^۳+۳x^۲-۳x+۱}{x^۳-۱} \geq ۰$$

در صورت کسر، اتحاد مکعب کامل و در مخرج کسر، اتحاد چاق و لاغر را می‌نویسیم:

$$\frac{-(x-۱)^۳}{(x-۱)(x^۲+x+۱)} \geq ۰ \xrightarrow{x \neq ۱} \frac{-(x-۱)^۲}{x^۲+x+۱} \geq ۰$$

$$\xrightarrow[\text{باتغییر جهت نامساوی}]{\text{ضرب طرفین در منفی}} \frac{(x-۱)^۲}{x^۲+x+۱} \leq ۰$$

واضح است که عبارت $(x-۱)^۲$ همواره بزرگ‌تر مساوی صفر و عبارت $x^۲+x+۱$ (به‌دلیل $\Delta < ۰$ و $a > ۰$)، همواره بزرگ‌تر از صفر است. پس حاصل تقسیم آن‌ها نمی‌تواند کوچک‌تر از صفر باشد. شاید فکر کرده باشید $x = ۱$ از آن‌جا که حاصل کسر را صفر می‌کند، در نامعادله صدق می‌کند، اما دقت کنید که عبارت اولیه به‌ازای $x = ۱$ به عنوان ریشه مخرج اصلاً تعریف نشده است. پس هیچ عددی در این نامعادله صدق نمی‌کند.

۱۱) به ازای $m \in (-\infty, b)$ مقدار عبارت گویای $\frac{mx^{۲}-۲(m+۱)x+m}{x^{۲}+۲x+۳}$ کوچک‌تر از صفر است. بزرگ‌ترین مقدار b کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱-
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

مخرج کسر عبارتی مثبت است، پس باید صورت کسر، عبارتی منفی باشد.

$$\left.\begin{array}{r} m < ۰ \\ \Delta < ۰ \Rightarrow ۴(m+۱)^{۲} - ۴m^{۲} < ۰ \Rightarrow ۲m+۱ < ۰ \Rightarrow m < -\frac{۱}{۲} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\cap} m < -\frac{۱}{۲}$$

پس به ازای $m \in (-\infty, -\frac{۱}{۲})$، مقدار عبارت موردنظر منفی است، در نتیجه حداکثر b برابر است با $-\frac{۱}{۲}$.

۱۲) به ازای چند مقدار صحیح x، مقدار عبارت $x - ۳ + |۲x - ۳|$ منفی است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

$$x - ۳ + |۲x - ۳| < ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < \frac{۳}{۲} : x - ۳ - ۲x + ۳ = -x < ۰ \Rightarrow x > ۰ \xrightarrow{x<\frac{۳}{۲}} x \in \left(۰, \frac{۳}{۲}\right) \quad (۱) \\ x \geq \frac{۳}{۲} : x - ۳ + ۲x - ۳ = ۳x - ۶ < ۰ \Rightarrow x < ۲ \xrightarrow{x\geq\frac{۳}{۲}} x \in \left[\frac{۳}{۲}, ۲\right) \quad (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} x \in (۰, ۲)$$

این بازه فقط شامل عدد صحیح ۱ است.

۱۳ اگر $a < ۰$ و عبارت $P(x) = \frac{x^۳-۱۲x^۲+۳۶x}{x^۲+x-۲}$ در بازه $(a\ ,\ b)$ مثبت باشد، در این صورت حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۱

۳) ۳

۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$$P(x) = \frac{x(x^۲-۱۲x+۳۶)}{x^۲+x-۲} = \frac{x(x-۶)^۲}{(x+۲)(x-۱)}$$

$x = ۰$ ، $x = ۶$ ، $x = ۱$ و $x = -۲$ ریشه‌های صورت و مخرج هستند.

x	$-\infty$		-۲		۰		۱		۶		$+\infty$
x		$-$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
$(x-۶)^۲$		$+$		$+$		$+$		$+$	۰	$+$	
$(x+۲)(x-۱)$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
P(x)		$-$		$+$	۰	$-$		$+$	۰	$+$	
			ت . ن				ت . ن				

طبق خواسته سوال برای آن‌که $b - a$ حداکثر و $a < ۰$ باشد، $(a\ ,\ b) = (-۲\ ,\ ۰)$ است. پس:

$$a = -۲\ ,\quad b = ۰ \Rightarrow Max(b - a) = ۲$$

۱۴) مجموعه جواب نامعادله $\frac{-2x}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} \le -1$ کدام است؟

۱) $(3 \,,\, 5]$

۲) $[-5 \,,\, -3]$

۳) $(-\infty \,,\, -2) \cup (3 \,,\, 5]$

۴) $(-3 \,,\, 3) \cup [5 \,,\, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

ابتدا عدد ۱- را به سمت چپ نامعادله آورده و مخرج مشترک می‌گیریم. مشخص است که مخرج مشترک عبارت مورد نظر $x^2 - 9$ است.

$$\frac{-2x-(x+3)+(x-3)+(x^2-9)}{x^2-9} \le 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x-x-3+x-3+x^2-9}{x^2-9} \le 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x-15}{x^2-9} \le 0 \Rightarrow \frac{(x-5)(x+3)}{(x-3)(x+3)} \le 0$$

$$\xrightarrow{x \neq -3} \frac{x-5}{x-3} \le 0$$

x		-3		3		5	
$x-5$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-5}{x-3}$	$+$	ت.ن	$+$	ت.ن	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow 3 < x \le 5 \Rightarrow x \in (3 \,,\, 5]$$

نقطه ۳ جزو جواب‌های مساله نیست، زیرا مخرج را صفر می‌کند.

۱۵) با توجه به جدول تعیین علامت عبارت $P = ۲x^۳ + ax^۲ + bx + c$، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

x		−2		1	
P	−	0	+	0	+

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴

عبارت P در x=۱ تغییر علامت نداده، ولی در $x = -۲$، تغییر علامت داده است، پس با توجه به این‌که در عبارت P، ضریب $x^۳$ برابر با ۲ است، می‌توان نوشت:

$$P = ۲(x - ۱)^۲(x + ۲) \Rightarrow P = ۲(x^۲ - ۲x + ۱)(x + ۲)$$

$$\Rightarrow P = ۲(x^۳ - ۲x^۲ + x + ۲x^۲ - ۴x + ۲)$$
$$\Rightarrow P = ۲(x^۳ - ۳x + ۲)$$

$$\Rightarrow P = ۲x^۳ - ۶x + ۴$$

از مقایسه تساوی اخیر با $P = ۲x^۳ + ax^۲ + bx + c$، داریم:

$$\begin{cases} a = ۰ \\ b = -۶ \\ c = ۴ \end{cases} \Rightarrow a + b + c = -۲$$

۱۶) مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۱}{|x+۱|} > \frac{۲}{|x-۲|}$ کدام است؟

۱) $(-۴\,,\,۰)$
۲) $(-۲\,,\,۲)$
۳) $(-۴\,,\,-۱)\cup(-۱\,,\,۰)$
۴) $(-\infty\,,\,-۴)\cup(۰\,,\,۲)\cup(۲\,,\,+\infty)$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

چون طرفین تساوی هر دو مثبت‌اند، پس می‌توانیم با در نظر گرفتن ریشه‌های مخرج‌ها طرفین وسطین انجام دهیم:

$$\frac{۱}{|x+۱|} > \frac{۲}{|x-۲|} \xrightarrow{x \neq -۱\,,\,۲} |x - ۲| > ۲|x + ۱|$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^۲ - ۴x + ۴ > ۴\left(x^۲ + ۲x + ۱\right)$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۱۲x < ۰ \Rightarrow ۳x(x + ۴) < ۰ \Rightarrow -۴ < x < ۰$$

با در نظر گرفتن شرط $x \neq -۱\,,\,۲$ داریم:

$$x \in (-۴\,,\,۰) - \{-۱\} = (-۴, -۱) \cup (-۱, ۰)$$

۱۷ مجموعه جواب نامعادلهٔ $1 > \frac{x^2}{x-1} \geq x$ کدام است؟

۱) $[0,1)$

۲) $(-\infty,0]$

۳) $(-2,0]$

۴) $(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

نامعادله را به دو نامعادلهٔ مجزا تقسیم می‌کنیم و در آخر از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$1)\ x \leq \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow \frac{x^2}{x-1} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-x^2+x}{x-1} \geq 0$$

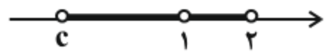
$$\Rightarrow \frac{x}{x-1} \geq 0 \xrightarrow{x\neq 1} x \leq 0 \quad \text{یا} \quad x > 1$$

$$\frac{x^2}{x-1} < 1 \Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x-1} < 0 \xrightarrow{\text{صورت همواره مثبت است}} x-1 < 0$$

$$\Rightarrow x < 1$$

از اشتراک جواب‌ها نتیجه می‌شود: $x \leq 0$

۱۸) نمایش هندسی مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^۲+x+a}{bx^۲+۲x+b} > ۰$ به‌صورت زیر است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۶
۳) ۸-
۴) ۱۰-

پاسخ: گزینه ۴

از آنجا که قبل و بعد $x=۱$، جزء مجموعه جواب است، می‌توان گفت که در $x=۱$ علامت عبارت $\frac{x^۲+x+a}{bx^۲+۲x+b}$ تغییر نکرده است. پس $x=۱$ ریشه مضاعف صورت یا مخرج است. در صورتی که عبارت $x^۲+x+a$ دارای ریشه مضاعف باشد، این ریشه $\frac{-۱}{۲}$ است، لذا $x=۱$ ریشه مضاعف مخرج کسر است.

$$\Rightarrow ۲b+۲=۰ \Rightarrow b=-۱$$

نامعادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{x^۲+x+a}{-(x-۱)^۲} > ۰ \Rightarrow \frac{x^۲+x+a}{(x-۱)^۲} < ۰$$

$x=۲$ ریشه صورت کسر است و داریم:

$$۴+۲+a=۰ \Rightarrow a=-۶$$

حال پاسخ نامعادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x^۲+x-۶}{(x-۱)^۲} < ۰ \Rightarrow \frac{(x-۲)(x+۳)}{(x-۱)^۲} < ۰ \Rightarrow$$

$$\text{جواب} = (-۳,۲)-\{۱\}$$

پس c هم برابر ۳- است.

$$a+b+c=-۶-۱-۳=-۱۰$$

۱۹) مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{x-۱}{۲}-\frac{۲x+۱}{۳}\right| \geq ۲$ کدام است؟

۱) $-۱۷ \leq x \leq ۷$
۲) $۷ \leq x \leq ۱۷$
۳) $x \geq ۷$ یا $x \leq -۱۷$
۴) $x \geq ۱۷$ یا $x \leq ۷$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $|u| \geq k \Rightarrow u \geq k$ یا $u \leq -k$

$$\left|\frac{x-۱}{۲}-\frac{۲x+۱}{۳}\right| \geq ۲ \Rightarrow \left|\frac{۳x-۳-۴x-۲}{۶}\right| \geq ۲ \Rightarrow \left|\frac{-x-۵}{۶}\right| \geq ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-x-۵}{۶} \geq ۲ \Rightarrow -x-۵ \geq ۱۲ \Rightarrow x \leq -۱۷ \\ \frac{-x-۵}{۶} \leq -۲ \Rightarrow -x-۵ \leq -۱۲ \Rightarrow x \geq ۷ \end{cases}$$

۲۰) با توجه به جدول تعیین علامت زیر، $a+b$ کدام است؟

x	$-\infty$	b	$+\infty$
$ax^۲+bx-۴$	+	۰	−

۱) ۲
۲) صفر
۳) -۲
۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

طبق جدول تعیین علامت، عبارت باید درجه اول باشد لذا $a=۰$ است و $x=b$ ریشه عبارت می‌باشد پس به‌جای x، b را قرار می‌دهیم:

	$-\infty$	b	$+\infty$
$bx-4$	+	۰	−

$$b(b)-۴=۰ \Rightarrow b^۲-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} b=۲ & \text{غ ق ق} \\ b=-۲ & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} a=۰ \\ b=-۲ \end{matrix} \Rightarrow a+b=-۲$$

۲۱) نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ax - ۲$ در بازه $(-\infty, -۲) \cup (b, +\infty)$ از نمودار تابع $g(x) = ۲x + ۴$ بالاتر است. $a + b$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۱

۳) ۴

۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

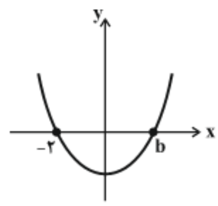
گزینه «۳»

نمودار تابع $f(x)$ از نمودار تابع $g(x)$ بالاتر است، یعنی:

$$f(x) > g(x) \Rightarrow x^۲ + ax - ۲ > ۲x + ۴ \Rightarrow x^۲ + (a - ۲)x - ۶ > ۰$$

حال می‌توان گفت جواب نامعادله $x^۲ + (a - ۲)x - ۶ > ۰$ به‌صورت $(-\infty, -۲) \cup (b, +\infty)$ می‌باشد.

بنابراین با توجه به رسم نمودار $y = x^۲ + (a - ۲)x - ۶$، به کمک بازه داده شده می‌توان نتیجه گرفت، جواب‌های معادله $x^۲ + (a - ۲)x - ۶ = ۰$، b و ۲- می‌باشند.



$$(-۲)^۲ + (a - ۲)(-۲) - ۶ = ۰ \Rightarrow -۲a + ۲ = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

$$\Rightarrow \text{معادله}: x^۲ - x - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ x = ۳ \end{cases}$$

جواب دیگر معادله $b = ۳$ است.

$$\Rightarrow a + b = ۱ + ۳ = ۴$$

۲۲) نمودار تابع $f(x) = \left|\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲+۴x+۳}\right|$ در بازه $(a,+\infty)$ پایین‌تر از خط $y=۱$ قرار دارد. کم‌ترین مقدار a کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{-۱}{۷}$
۳) -۱
۴) -۷

پاسخ: گزینه ۲

مجموعه جواب نامعادله $f(x) < ۱$ بازه‌ای است که نمودار $f(x)$ پایین‌تر از خط $y=۱$ قرار دارد.

$$f(x) < ۱ \Rightarrow \left|\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲+۴x+۳}\right| < ۱$$

$$\Rightarrow \left|\underbrace{x^۲-۳x+۲}_{A}\right| < \left|\underbrace{x^۲+۴x+۳}_{B}\right|$$

یادتان باشد برای حل نامعادله $|A| < |B|$ می‌توان به فرم زیر عمل کرد:

$$|A| < |B| \xrightarrow{2} A^۲ < B^۲ \Rightarrow A^۲ - B^۲ < ۰$$

$$(x \neq -۱, -۳)$$

$$\Rightarrow (A-B)(A+B) < ۰$$

پس: $(-۷x-۱)\underbrace{(۲x^۲+x+۵)}_{\text{همواره مثبت}\left\{\begin{smallmatrix}\Delta<۰\\ \text{ضریب } x^۲\end{smallmatrix}\right.} < ۰ \Rightarrow -۷x-۱ < ۰ \Rightarrow x > -\frac{۱}{۷}$

$$(x \neq -۱, -۳)$$

در نتیجه کم‌ترین مقدار a برابر $(-\frac{۱}{۷})$ است.

۲۳) تعداد اعداد صحیح نامنفی که در نامعادله $||x-۲|-۱| \leq ۳$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) ۹
۲) ۸
۳) ۷
۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

می‌دانیم: $|u| \leq a \Rightarrow -a \leq u \leq a \quad , \quad a \geq ۰$

پس داریم:

$$||x-۲|-۱| \leq ۳ \Rightarrow -۳ \leq |x-۲|-۱ \leq ۳ \Rightarrow -۲ \leq |x-۲| \leq ۴$$

روشن است که $|x-۲| \geq ۰$، پس رابطه $|x-۲| \geq -۲$، همواره برقرار است، در نتیجه: $|x-۲| \leq ۴ \Rightarrow -۴ \leq x-۲ \leq ۴ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۶$

بنابراین مجموعه اعداد صحیح نامنفی که در نامعادله صدق می‌کنند، عبارتند از:

$$\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

(۲۴) مجموعه جواب نامعادله‌ی $(x^۲ + ۹)(|x| + ۴)(|x| - ۴) \leq ۰$ کدام است؟

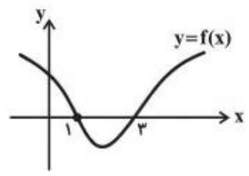
۱) $[-۴, ۴]$
۲) $[-۲, ۵]$
۳) $[-۳, ۹]$
۴) $[۱, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۱

عبارت‌های $(x^۲ + ۹)$ و $(|x| + ۴)$ همواره مثبت هستند، پس می‌توانیم از آن‌ها صرف‌نظر کنیم، لذا چنین می‌نویسیم:

$$|x| - ۴ \leq ۰ \Rightarrow |x| \leq ۴ \xrightarrow[\text{قدرمطلق}]{\text{طبق خواص}} -۴ \leq x \leq ۴$$

(۲۵) شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. اگر عبارت $A = \frac{x\,f(x)}{|x^۲-۹|}$ در بازه $(-۱, a)$ همواره منفی باشد، بیشترین مقدار a کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به نمودار، $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = ۳$ دو ریشه ساده تابع f بوده و همچنین تابع f بین این دو ریشه دارای مقدار منفی و خارج از این دو ریشه دارای مقدار مثبت است.

حال با استفاده از جدول تعیین علامت، عبارت A را تعیین علامت می‌کنیم:

		–1		0		1		3	
x	–		–	0	+		+		+
$\lvert x^2-9\rvert$	+		+		+		+	0	+
f(x)	+		+		+	0	–	0	+
A	–		–	0	+	0	–	تعریف نشده	+

$$(-۱, a) = (-۱, ۰) \Rightarrow a = ۰$$