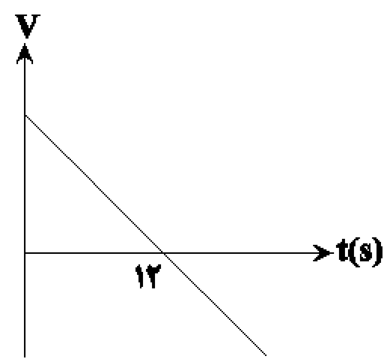
۱) نمودار سرعت ـ زمان متحرکی مطابق شکل مقابل است. تا چه لحظه‌ای برحسب ثانیه از شروع حرکت، سرعت متوسط متحرک $\frac{۱}{۳}$ سرعت اولیهٔ آن است؟



۱) ۸
۲) ۴
۳) ۱۲
۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۴

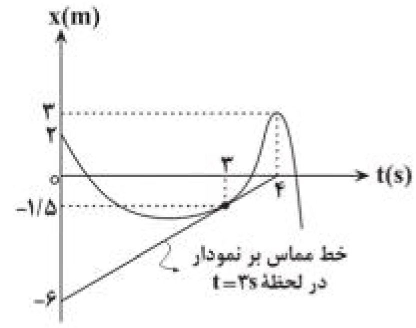
گزینهٔ «۴»

معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرک از روی نمودار به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$v = at + v_\circ \xrightarrow{a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-v_\circ}{۱۲}} v = -\frac{v_\circ}{۱۲}t + v_\circ \quad (۱)$$

$$v_{av} = \frac{v+v_\circ}{۲} \xrightarrow[(۱)]{v_{av}=\frac{۱}{۳}v_\circ} \frac{۱}{۳}v_\circ = \frac{-\frac{v_\circ}{۱۲}t+v_\circ+v_\circ}{۲} \Rightarrow t = ۱۶s$$

۲) نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل زیر است. بزرگی شتاب متوسط در ثانیه چهارم چند $\frac{m}{s^۲}$ است؟



۱) ۶

۲) $\frac{۹}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

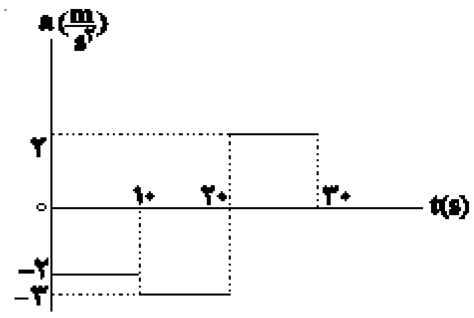
۴) $\frac{۳}{۸}$

پاسخ: گزینه ۳

چون شیب مماس بر نمودار مکان – زمان در لحظه $t = ۴s$ صفر است، در نتیجه $v_۴ = ۰$ است. ثانیه چهارم یعنی بازه $t = ۳s$ تا $t = ۴s$، پس:

$$\begin{cases} a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۴ - v_۳}{۴-۳} \\ v_۳ = \text{شیب خط مماس} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{۰-\frac{۳}{۲}}{۱} = -\frac{۳}{۲}\frac{m}{s^۲}$$

③ نمودار شتاب – زمان متحرکی که روی خط راست در حال حرکت است، به‌صورت شکل مقابل است. اگر این متحرک در لحظهٔ $t_0 = 0$ از مبدأ مکان با سرعت $\vec{v}_0 = +10\vec{i}(\frac{m}{s})$ عبور کند، کدام گزینه در مورد حرکت آن در ۳۰ ثانیهٔ ابتدای حرکت نادرست است؟

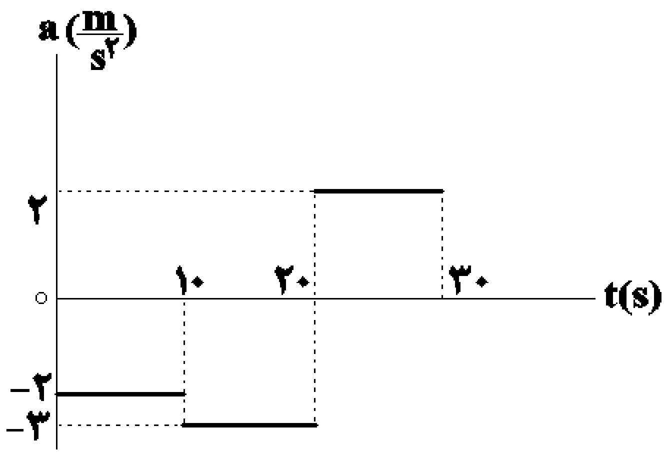


۱) متحرک در بازهٔ زمانی ۵s تا ۳۰s در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.
۲) مسافت طی شده توسط متحرک در ۳۰ ثانیهٔ اول حرکت ۶۰۰ متر است.
۳) بیش‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان ۵۵۰ متر است.
۴) در بازهٔ زمانی ۵s تا ۳۰s، فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان همواره در حال افزایش است.

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

ابتدا به کمک سطح محصور بین نمودار شتاب – زمان و محور زمان، سرعت متحرک را در لحظه‌های مختلف محاسبه نموده و به کمک آن نمودار سرعت – زمان را رسم می‌کنیم. می‌دانیم سطح محصور بین نمودار شتاب – زمان و محور زمان در یک بازهٔ زمانی معین برابر با تغییرات سرعت متحرک در همان بازهٔ زمانی است.

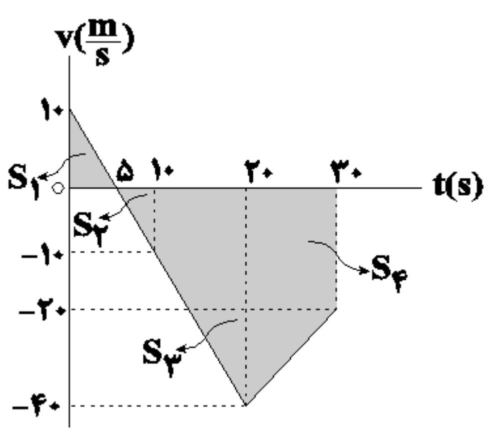


$$v_{10\,s} - v_0 = -20\frac{m}{s} \Rightarrow v_{10\,s} = -20 + 10 = -10\frac{m}{s}$$

$$v_{20\,s} - v_{10\,s} = -30\frac{m}{s} \Rightarrow v_{20\,s} = -30 - 10 = -40\frac{m}{s}$$

$$v_{30\,s} - v_{20\,s} = 20\frac{m}{s} \Rightarrow v_{30\,s} = -20\frac{m}{s}$$

حال با توجه به ثابت بودن شتاب در هر مرحله، نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم. با توجه به تشابه مثلث‌ها در لحظهٔ $t = 5\,s$، جهت حرکت متحرک عوض شده است. حال به کمک سطح محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان که در یک بازهٔ زمانی معین برابر با بزرگی جابه‌جایی متحرک در همان بازهٔ زمانی است، مسافت طی‌شده توسط متحرک و بیش‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان را به‌دست می‌آوریم:



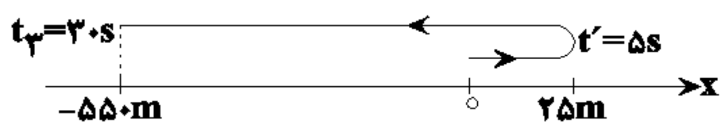
مسافت طي شده توسط متحرك $\ell = S_۱ + S_۲ + S_۳ + S_۴$

$= \frac{۵\times۱۰}{۲} + \frac{۵\times۱۰}{۲} + \frac{(۱۰+۴۰)\times۱۰}{۲} + \frac{(۲۰+۴۰)\times۱۰}{۲}$

$= ۲۵ + ۲۵ + ۲۵۰ + ۳۰۰ = ۶۰۰m$

متحرک در بازهٔ زمانی ۵s تا ۳۰s در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. زیرا علامت سرعت در این بازهٔ زمانی، منفی است. جابه‌جایی متحرک در ۱۰ ثانیهٔ ابتدای حرکت صفر است. یعنی متحرک پس از گذشت ۱۰s به مبدأ مکان بر می‌گردد و پس از آن به اندازهٔ $۲۵۰ + ۳۰۰ = ۵۵۰$ متر در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، پس بیش‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان، برابر با ۵۵۰ متر است.

حال مسیر حرکت متحرک را نمایش می‌دهیم:



با توجه به مسیر حرکت متحرک، در لحظهٔ $t' = ۵\,s$ متحرک تغییر جهت می‌دهد و در بازهٔ زمانی ۵ s تا ۱۰ s به مبدأ مکان نزدیک می‌شود.

۴) متحرکی با شتاب ثابت در مسیر مستقیم در حال حرکت است. اگر تندی متحرک در لحظات $t_۱ = ۱s$ و $t_۲ = ۴s$ به‌ترتیب برابر $۱۰\frac{m}{s}$ و $۲\frac{m}{s}$ و نوع حرکت متحرک در لحظهٔ $t_۲ = ۴s$ تندشونده باشد، مسافت طی شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۴s$ چند متر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

از آن‌جایی که $v_{t_۲} < v_{t_۱}$ است، بنابراین چون حرکت با شتاب ثابت است، در ابتدا نوع حرکت متحرک کندشونده است. اگر فرض کنیم متحرک در ابتدا در خلاف جهت محور x در حال حرکت است، داریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۲-(-۱۰)}{۳} = ۴\frac{m}{s^۲}$$

لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر می‌شود (t') را به‌دست می‌آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = t'-۱\,,\ a = ۴\frac{m}{s^۲}]{\Delta v = ۰-(-۱۰) = ۱۰\frac{m}{s}} ۴ = \frac{۱۰}{t'-۱}$$

$$t' = ۳/۵s \text{ و } \Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}\Delta t$$

$$\ell = \left|\Delta x_{۱s-۳/۵s}\right| + \left|\Delta x_{۳/۵s-۴s}\right| = \left|\frac{-۱۰+۰}{۲} \times ۲/۵\right| + \frac{۰+۲}{۲} \times ۰/۵$$

$$= ۱۲/۵ + ۰/۵ = ۱۳m$$

⑤ قطار A با طول ۴۵۰ m با تندی ثابت $۱۰۸\frac{km}{h}$ روی ریلی مستقیم در حال حرکت است. قطار B به طول ۶۰۰ m در ریل کناری ساکن است و پس از آن‌که قطار A به‌طور کامل از آن سبقت می‌گیرد با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت می‌کند و پس از ۱۸ ثانیه با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. مسافت طی شده توسط قطار B از لحظه شروع حرکت تا لحظه‌ای که به‌طور کامل از قطار A سبقت می‌گیرد، چند متر است؟

۱) ۱۰۵۰۰ ۲) ۱۰۸۰۰ ۳) ۷۹۲۰ ۴) ۱۰۰۸۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه«۳»

قطار B زمانی به‌طور کامل از قطار A سبقت می‌گیرد که انتهای قطار B به ابتدای قطار A برسد. بنابراین می‌توانیم ابتدای قطار A و انتهای قطار B را دو متحرک در نظر بگیریم. در لحظه t=۰، فاصله این دو متحرک برابر با مجموع طول قطارهاست.

$$a_B = ۲\frac{m}{s^۲}$$

$$v_{\circ B} = ۰$$

$$\ell = 450 + 600 = 1050\,m$$

$$v_A = 108\frac{km}{h} = \frac{108}{3/6}\frac{m}{s} = 30\frac{m}{s}$$

حرکت متحرک B دو مرحله دارد. اول ۱۸ ثانیه با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ حرکت می‌کند و سپس با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

$$x_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + v_{\circ B}t + x_{\circ B} \xrightarrow[a_B = ۲\frac{m}{s^۲}\,,\, v_{\circ B} = ۰]{x_{\circ B} = ۰\,,\, t = ۱۸\,s} x'_B = ۳۲۴\,m$$

اگر در لحظه t متحرک B به متحرک A برسد داریم:

$$x_B = x_A \xrightarrow[v_A = ۳۰\frac{m}{s}]{x_A = v_A t + x_{\circ A}\,,\, x_{\circ A} = ۱۰۵۰\,m}$$

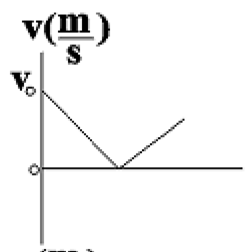
$$x'_B + v_B(t - ۱۸) = ۳۰t + ۱۰۵۰$$

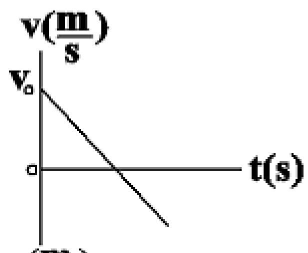
$$\xrightarrow[x'_B = ۳۲۴\,m]{v_B = a_B t = ۲\times۱۸ = ۳۶\frac{m}{s}} ۳۲۴ + ۳۶(t - ۱۸) = ۳۰t + ۱۰۵۰$$

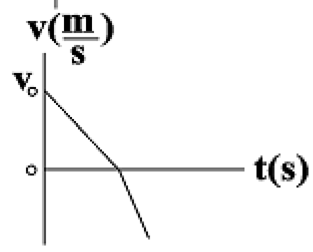
$$\Rightarrow t = ۲۲۹\,s$$

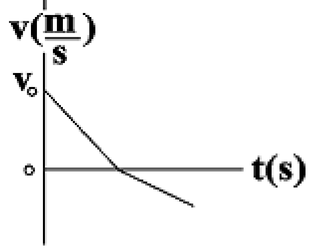
$$\Rightarrow x_B = ۳۲۴ + ۳۶(۲۲۹ - ۱۸) = ۷۹۲۰\,m$$

۶) گلوله‌ای را در مبدأ زمان در راستای قائم و با تندی $v_0 \frac{m}{s}$ به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر اندازهٔ نیروی مقاومت هوا را در طی حرکت گلوله ثابت فرض کنیم، نمودار سرعت - زمان آن در بازهٔ زمانی رفت و برگشت گلوله، با درنظر گرفتن جهت مثبت محورy به‌طرف بالا کدام گزینه خواهد بود؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینه ۴

گزینه«۴»

نیروهای وارد بر گلوله را در مسیرهای رفت و برگشت رسم می‌کنیم و با درنظر گرفتن جهت مثبت محور y به‌طرف بالا، به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را در هر دو حالت محاسبه می‌کنیم.

بالا رفتن ↑

$\downarrow \vec{f_D} \quad \downarrow \vec{mg}$

$F_{net,1} = -(f_D + mg)$

$\Rightarrow a_1 = \frac{F_{net,1}}{m} = -(\frac{f_D+mg}{m})$

$\Rightarrow a_1 = -(g + \frac{f_D}{m}) \quad (1)$

پایین آمدن ↓   + ↑

$\uparrow \vec{f_D} \quad \downarrow \vec{mg}$

$F_{net,1} = -mg + f_D$

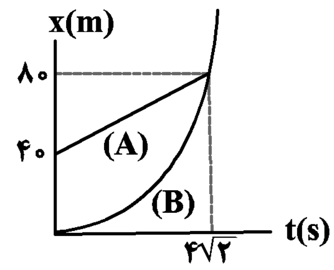
$\Rightarrow a_2 = \frac{F_{net,2}}{m} = -(\frac{mg-f_D}{m})$

$\Rightarrow a_2 = -(g - \frac{f_D}{m}) \quad (2)$

$(1), (2) \rightarrow |a_1| > |a_2|$

ملاحظه می‌شود در حین بالا رفتن اندازهٔ شتاب بیش‌تر از پایین آمدن گلوله است. زیرا نیروی خالص به سبب همسو بودن نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا هنگام بالا رفتن بزرگ‌تر است. در هر دو حالت شتاب رو به پایین است یعنی علامت آن منفی است. لذا شیب نمودار سرعت – زمان که برابر شتاب حرکت است، در هر دو حالت باید منفی باشد و هنگام بالا رفتن اندازهٔ شیب بزرگ‌تر از پایین آمدن گلوله باشد.

۷) نمودار مکان- زمان دو متحرک A و B که در مسیری مستقیم حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. اگر نمودار B یک سهمی باشد که در مبدأ زمان بر محور زمان مماس است، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، سرعت دو متحرک برابر می‌شود؟



۱) $\sqrt{۲}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

نمودار مکان- زمان متحرک A به‌صورت خط راست با شیب غیرصفر است، بنابراین سرعت آن ثابت است و می‌توان نوشت:

$$v_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{۸۰-۴۰}{۴\sqrt{۲}-۰} \Rightarrow v_A = ۵\sqrt{۲}\frac{m}{s}$$

نمودار مکان- زمان متحرک B به‌صورت یک سهمی است. با توجه به این‌که متحرک B از مبدأ مکان شروع به حرکت کرده است $(x_{0B} = ۰)$ و در مبدأ زمان نمودار مکان- زمان بر محور زمان مماس است $(v_{0B} = ۰)$، می‌توان نوشت:

$$x_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + v_{0B}t + x_{0B} \xrightarrow[v_{0B}=۰]{x_{0B}=۰} x_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲$$

$$\xrightarrow[x_B=۸۰m]{t=۴\sqrt{۲}s} ۸۰ = \frac{۱}{۲}a_B \times ۳۲ \Rightarrow a_B = ۵\frac{m}{s^۲}$$

بنابراین معادله سرعت- زمان متحرک B برابر است با:

$$v_B = a_B t + v_{0B} \ , \ v_B = v_A$$

$$\xrightarrow[v_{0B}=۰ \ , \ a_B=۵\frac{m}{s^۲}]{v_A=۵\sqrt{۲}\frac{m}{s}} ۵\sqrt{۲} = ۵t + ۰ \Rightarrow t = \sqrt{۲}s$$

۸) سرعت متحرکی که با شتاب ثابت $۱/۵\frac{m}{s^۲}$ روی محور x در حال حرکت است، در مکان $x_1 = ۹m$ برابر با $(-۷)\frac{m}{s}$ است. در چه مکانی برحسب متر، سرعت متحرک برابر با $۱۱\frac{m}{s}$ خواهد بود؟

۱) -۳۳
۲) ۱۵
۳) ۲۴
۴) ۳۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

با استفاده از معادله سرعت ـ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت، داریم:

$$v_۲^۲ = v_۱^۲ + ۲a(x_۲ - x_۱) \Rightarrow ۱۱^۲ = (-۷)^۲ + ۲ \times ۱/۵ \times (x_۲ - ۹) \Rightarrow x_۲ = ۳۳m$$

۹) متحرکی با سرعت ثابت روی محور xها حرکت می‌کند و در لحظه‌های $t_1 = ۲s$ و $t_2 = ۵s$ به‌ترتیب از مکان‌های $x_1 = -۵m$ و $x_2 = ۱۳m$ عبور می‌کند. این متحرک در لحظه $t = ۴s$ در چه فاصله‌ای برحسب متر از مبدأ حرکت قرار دارد؟

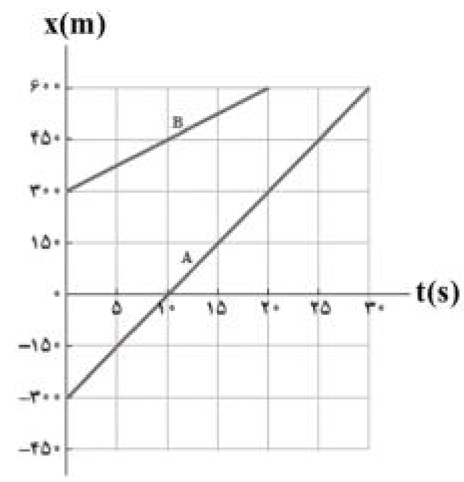
۱) ۲۴ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۱

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{۱۳-(-۵)}{۵-۲} = ۶\frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[t=۴s]{v=۶\frac{m}{s}} x - x_0 = ۶ \times ۴ = ۲۴m$$

۱۰ شکل مقابل نمودار مکان − زمان دو خودرو را که روی خط راست حرکت می‌کنند، نشان می‌دهد. در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه فاصله دو خودرو از یک‌دیگر ۹۰۰ متر می‌شود؟



۱) ۱۰۰
۲) ۱۵۰
۳) ۲۰۰
۴) ۳۰۰

پاسخ: گزینه ۱

از روی نمودار، سرعت خودروهای A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\begin{cases} \Delta x_B = ۴۵۰ - ۳۰۰ = ۱۵۰\,m \\ \Delta t_B = ۱۰ - ۰ = ۱۰\,s \end{cases} \Rightarrow v_B = \frac{۱۵۰}{۱۰} = ۱۵\frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} \Delta x_A = -۱۵۰ - (-۳۰۰) = ۱۵۰\,m \\ \Delta t_A = ۵\,s \end{cases} \Rightarrow v_A = \frac{۱۵۰}{۵} = ۳۰\frac{m}{s}$$

اکنون معادله مکان − زمان دو خودرو را می‌نویسیم:

$$x = vt + x_0$$

$$\begin{cases} v_B = ۱۵\dfrac{m}{s} \\ x_{0B} = ۳۰۰\,m \end{cases} \Rightarrow x_B = ۱۵t + ۳۰۰ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} v_A = ۳۰\dfrac{m}{s} \\ x_{0A} = -۳۰۰\,m \end{cases} \Rightarrow x_A = ۳۰t - ۳۰۰ \quad (۲)$$

در $t = ۰s$ فاصله دو متحرک ۶۰۰ متر است و متحرک B جلوتر از متحرکA است. با توجه به این‌که $v_A > v_B$ است، ابتدا فاصله دو متحرک A و B کاهش می‌یابد تا زمانی‌که دو متحرک به هم برسند و سپس متحرک A از متحرک B سبقت می‌گیرد و فاصله دو متحرک پس از این لحظه پیوسته افزایش می‌یابد. بنابراین در لحظه‌ای که فاصله دو متحرک ۹۰۰ متر است، متحرک A جلوتر از متحرک B است.

$$\Delta x = x_A - x_B = ۹۰۰\,m \Rightarrow (۳۰t - ۳۰۰) - (۱۵t + ۳۰۰) = ۹۰۰$$

$$\Rightarrow t = \frac{۱۵۰۰}{۱۵} = ۱۰۰\,s$$

راه دوم: با استفاده از سرعت نسبی می‌توان مسئله را در مدت زمان کوتاه‌تری حل نمود. در ابتدا متحرک B، ۶۰۰ متر جلوتر از متحرک A است. با توجه به این‌که تندی متحرک B کم‌تر از متحرک A است، برای آن‌که فاصله دو متحرک به ۹۰۰متر برسد بایستی متحرک A از B سبقت بگیرد. به عبارت دیگر، در لحظه‌ای که دو متحرک در فاصله ۹۰۰ متری یکدیگر قرار می‌گیرند، متحرک B،۹۰۰ متر عقب‌تر از متحرک A قرار دارد.

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}}\Delta t + x_{0\,\text{نسبی}}$$

$$\Rightarrow -۹۰۰ = (۱۵ - ۳۰)t + ۶۰۰$$

$$\Rightarrow t = \frac{۱۵۰۰}{۱۵} = ۱۰۰s$$

۱۱) کامیونی با سرعت ثابت $30\frac{m}{s}$ در مسیر مستقیمی حرکت می‌کند. ۱۲۵ متر جلوتر از کامیون، خودرویی با شتاب ثابت $2\frac{m}{s^2}$ از حال سکون و در همان مسیر شروع به حرکت می‌کند. سرعت این خودرو در لحظه‌ای که از کامیون سبقت می‌گیرد، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

کامیون را متحرک (۱) و خودرو را متحرک (۲) در نظر می‌گیریم و با فرض مکان اولیهٔ خودرو به عنوان مبدأ مکان، معادلهٔ هر دو متحرک را می‌نویسیم. داریم: $x_1 = v_1 t + x_{0_1} \Rightarrow x_1 = 30t - 125$

$$x_2 = \frac{1}{2}at^2 + v_{0_2}t + x_{0_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\times 2t^2 + 0 + 0 \Rightarrow x_2 = t^2$$

لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، مکان‌های آنها با یکدیگر برابر است. داریم:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 30t - 125 = t^2 \Rightarrow t^2 - 30t + 125 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 5s \\ t_2 = 25s \end{cases}$$

در لحظهٔ $t_1 = 5s$ کامیون از خودرو و در لحظهٔ $t_2 = 25s$ خودرو از کامیون سبقت می‌گیرد. پس داریم:

$$v_2 = a_2 t_2 + v_{0_2} \Rightarrow v_2 = 2\times 25 + 0 = 50\frac{m}{s}$$

۱۲) کدام‌یک از عبارات زیر در توصیف ویژگی‌های حرکت یک‌نواخت بر روی خط راست، صحیح نیست؟

۱) سرعت لحظه‌ای در تمام لحظه‌ها یک‌سان است.
۲) بین هر دو لحظه‌ی دلخواه، سرعت متوسط با سرعت لحظه‌ای برابر است.
۳) نمودار مکان- زمان آن یک خط راست است.
۴) اگر متحرک از مبدأ مکان شروع به حرکت کند، سرعت آن همواره مثبت است.

پاسخ: گزینه ۴

در حرکت یک‌نواخت بر روی خط راست، چون سرعت ثابت است، بنابراین سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای یک‌سان هستند و نمودار مکان-زمان آن به‌صورت یک خط راست است (زیرا $x = vt + x_0$). در حرکت یک‌نواخت، اگر متحرک از مبدأ مکان شروع به حرکت کند، مکان اولیه‌ی آن صفر است و لزوماً سرعت متحرک مثبت نیست و می‌تواند منفی باشد.

۱۳) دانش‌آموزی با دوچرخه خود، ۱۵ متر از مسیری را در مدت ۴ ثانیه طی می‌کند. سرعت متوسط دانش‌آموز برحسب متر بر ثانیه کدام است؟

۱) ۳/۷۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۱/۲ ۴) اطلاعات مسأله کافی نیست.

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

دقت کنید که در صورت سؤال راجع به مسیر حرکت دانش‌آموز همراه با دوچرخه صحبتی نشده است (خط راست یا منحنی)، در نتیجه فاصله نقطه شروع تا پایان حرکت (طول بردار جابه‌جایی) در مدت زمان ۴ ثانیه مشخص نیست و این یعنی جابه‌جایی و در نتیجه سرعت متوسط آن قابل محاسبه نیست.

۱۴) دو متحرک A و B در مبدأ زمان از مکان‌های $x_A = ۳۰\,m$ و $x_B = -۶۰\,m$ با تندی‌های یکسان به سمت یکدیگر در حال حرکت هستند. اگر دو متحرک با اختلاف زمانی $۲/۵s$ از مبدأ مختصات عبور کنند، در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه دو متحرک از کنار هم عبور می‌کنند؟

۱) ۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۳/۷۵ ۴) ۶/۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

چون تندی دو متحرک یکسان است و متحرک A نسبت به متحرک B در مبدأ زمان در فاصله نزدیک‌تری به مبدأ مکان قرار دارد، بنابراین متحرک A سریع‌تر به مبدأ مکان می‌رسد.

$$x_A = v_A t + x_{\circ A} \xrightarrow{x_A=\circ\ ,x_{\circ A}=۳۰\,m} \circ = v_A t + ۳۰$$

$$t = \frac{-۳۰}{v_A} \xrightarrow{v_A<\circ} t = \frac{۳۰}{|v_A|}(I)$$

$$x_B = v_B t' + x_{\circ B} \xrightarrow[x_{\circ B}=-۶۰\,m]{t'=t+۲/۵} \circ = v_B(t+۲/۵) - ۶۰$$

$$\Rightarrow t + ۲/۵ = \frac{۶۰}{|v_B|}(\text{مثبت است})(II)$$

اگر دو رابطه I و II را از هم کم کنیم داریم:

$$۲/۵ = \frac{۶۰}{|v_B|} - \frac{۳۰}{|V_A|} \xrightarrow{|v_B|=|V_A|}$$
$$۲/۵ = \frac{۳۰}{|V_A|} \Rightarrow |V_A| = |v_B| = \frac{۳۰}{۲/۵}$$
$$\Rightarrow |V_A| = |v_B| = ۱۲\frac{m}{s}\begin{cases} x_A = -۱۲t + ۳۰ \\ x_B = ۱۲t - ۶۰ \end{cases}$$

در لحظه‌ای که دو متحرک از کنار هم عبور می‌کنند $x_A = x_B$ است. داریم:

$$-۱۲t + ۳۰ = ۱۲t - ۶۰ \Rightarrow t = \frac{۹۰}{۲۴} = ۳/۷۵\,s$$

راه دوم: با توجه به این‌که $|v_A| = |v_B| = ۱۲\frac{m}{s}$، با استفاده از رابطه سرعت نسبی داریم:

$$t = \left|\frac{x_{\text{نسبی}}}{v_{\text{نسبی}}}\right| \xrightarrow[v_{\text{نسبی}}=۱۲+۱۲=۲۴\frac{m}{s}]{x_{\text{نسبی}}=۶۰+۳۰=۹۰\,m} t = \frac{۹۰}{۲۴} = ۳/۷۵s$$

۱۵) در یک مسابقه دو و میدانی دو نفره روی مسیری مستقیم به طول ۱۰۰m، دونده A با اختلاف ۲۰ متر برنده می‌شود. با فرض این‌که در کل مسیر مسابقه تندی دو دونده A و B ثابت باشد، در لحظه اعلام شروع مسابقه دونده A چند متر عقب‌تر از خط شروع مسابقه قرار گیرد تا هر دو دونده همزمان به خط پایان برسند؟

۱) ۱۶
۲) ۲۰
۳) ۲۲
۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ۴

بر اساس نتیجه مسابقه اول می‌توان نسبت تندی دو متحرک را محاسبه نمود.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x_A = v_A t \Rightarrow ۱۰۰ = v_A t \\ \Delta x_B = v_B t \Rightarrow ۸۰ = v_B t\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱۰۰}{۸۰} = \frac{v_A}{v_B} \quad (۱)$$

در حالت دوم، طول مسیر دونده A برابر با $۱۰۰ + x$ متر و طول مسیر دونده B برابر با ۱۰۰m است. بنابراین داریم:

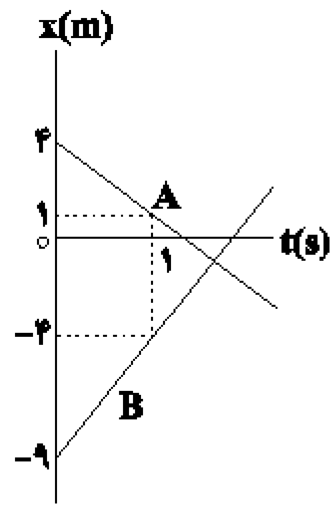
$$\left.\begin{array}{l}\Delta x_A = v_A t \Rightarrow ۱۰۰ + x = v_A t \\ \Delta x_B = v_B t \Rightarrow ۱۰۰ = v_B t\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱۰۰+x}{۱۰۰} = \frac{v_A}{v_B} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱۰۰}{۸۰} = \frac{۱۰۰+x}{۱۰۰} \Rightarrow ۱۰۰۰ = ۸۰۰ + ۸x \Rightarrow ۲۰۰ = ۸x \Rightarrow x = ۲۵m$$

دونده A اگر ۲۵ متر عقب‌تر از خط شروع باشد، هر دو با هم به خط پایان می‌رسند.

۱۶) نمودار مکان – زمان دو متحرک A و B مطابق شکل زیر است. در لحظه‌ای که $\vec{r}_A = -۲\vec{r}_B$ می‌شود، فاصله دو متحرک از یکدیگر چند متر است؟ ($\vec{r}_A$ و $\vec{r}_B$ به‌ترتیب بردار مکان دو متحرک A و B است.)



۱) ۶
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

$$v_A = \frac{۱-۴}{۱-۰} = -۳\frac{m}{s} \xrightarrow{x_A = v_A t + x_{۰A},\ x_{۰A} = ۴m} x_A = -۳t + ۴$$

$$v_B = \frac{-۴-(-۹)}{۱-۰} = ۵\frac{m}{s} \xrightarrow[x_{۰B} = -۹m]{x_B = v_B t + x_{۰B}} x_B = ۵t - ۹$$

$$\vec{r}_A = -۲\vec{r}_B \xrightarrow[x_B = ۵t-۹]{x_A = -۳t+۴} -۳t + ۴ = -۲(۵t - ۹)$$

$$\Rightarrow ۷t = ۱۴ \Rightarrow t = ۲s \Rightarrow \begin{cases} x_A = -۲m \\ x_B = ۱m \end{cases} \Rightarrow |x_B - x_A| = ۳m$$

۱۷) دو متحرک A و B روی محور xها با سرعت‌های ثابت در حال حرکت هستند و هم‌زمان با هم در لحظه $t = ۰$ از مبدأ حرکت خود عبور می‌کنند. متحرک A در ثانیه دوم حرکت از مکان $x_۱ = -۲۰m$ تا مبدأ مکان جابه‌جا می‌شود و متحرک B در ۴ ثانیه دوم حرکت از مکان $x_۱ = ۶۰m$ تا $x_۲ = ۲۰m$ جابه‌جا می‌شود. در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه این دو متحرک به یکدیگر می‌رسند؟

۱) ۱۶ **۲)** $\frac{۱۶}{۳}$ **۳)** $\frac{۱۴}{۳}$ **۴)** ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

معادلات حرکت هر دو متحرک را می‌نویسیم:

متحرک A: ثانیه دوم $t = ۱s$ تا $t = ۲s$

$$(v_{av})_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۰-(-۲۰)}{۲-۱} = \frac{۲۰}{۱} = ۲۰\frac{m}{s} \ , \ x = (v_{av})_A t + x_۰$$

با جایگذاری یکی از مکان‌ها و زمان‌های داده شده، مکان متحرک A در لحظه $t_۰ = ۰$ به‌دست می‌آید.

$$\left.\begin{matrix} x = ۰ \\ t = ۲s \end{matrix}\right\} ۰ = ۲۰ \times ۲ + x_۰ \Rightarrow x_۰ = -۴۰m$$

بنابراین برای متحرک A معادله حرکت به‌صورت $x_A = ۲۰t - ۴۰$ خواهد بود.

متحرک B:

$$\text{ثانیه دوم } ۴: t = ۴s \text{ تا } t = ۸s \Rightarrow (v_{av})_B = \frac{۲۰-۶۰}{۸-۴} = \frac{-۴۰}{۴} = -۱۰\frac{m}{s}$$

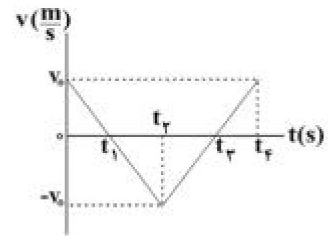
$$\left.\begin{matrix} t = ۴s \\ x = ۶۰m \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۶۰ = -۱۰ \times ۴ + x_۰ \Rightarrow x_۰ = ۱۰۰m$$

بنابراین معادله حرکت متحرک B به صورت $x_B = -۱۰t + ۱۰۰$ خواهد بود.

وقتی که این دو متحرک در یک مکان باشند باید $x_A = x_B$ شود، بنابراین داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow -۱۰t + ۱۰۰ = ۲۰t - ۴۰ \Rightarrow ۱۴۰ = ۳۰t \Rightarrow t = \frac{۱۴}{۳}s$$

۱۸) نمودار سرعت – زمان متحرکی که روی محور xها در حال حرکت است، مطابق شکل زیر می‌باشد. در کدام‌یک از بازه‌های زمانی زیر، بردارهای سرعت متوسط و شتاب متوسط خلاف جهت محور xها هستند؟ (محور زمان به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است.)



۱) ۰ تا $t_۱$
۲) $t_۱$ تا $t_۴$
۳) ۰ تا $t_۳$
۴) $t_۳$ تا $t_۴$

پاسخ: گزینه ۳

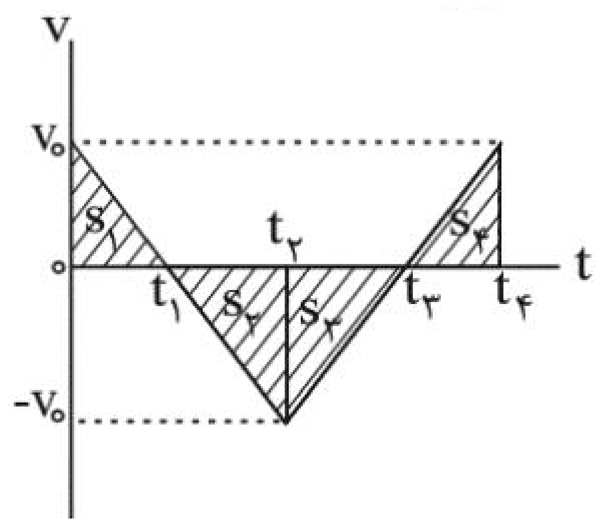
گزینهٔ «۳»

شیب خطی که دو نقطه را در نمودار سرعت – زمان به هم متصل می‌کند برابر با شتاب متوسط بین آن دو نقطه است. از طرفی مساحت محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان برابر با جابه‌جایی است. با توجه به رابطهٔ $\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}$، سرعت متوسط و جابه‌جایی با یکدیگر هم‌جهت هستند.

اکنون به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱» (۰ تا $t_۱$) : در این بازه شتاب متوسط منفی و جابه‌جایی مثبت است.

$$\Delta x = S_۱ > ۰ \Rightarrow v_{av} > ۰$$
$$\Delta v < ۰ \Rightarrow a_{av} < ۰$$



گزینهٔ «۲» ($t_۱$ تا $t_۴$): در این بازه جابه‌جایی منفی و شتاب متوسط مثبت است.

$$\Delta x = -S_۲ - S_۳ + S_۴ \xrightarrow{S_۳=S_۴}$$

$$\Delta x = -S_۲ < ۰ \Rightarrow v_{av} < ۰, \Delta v > ۰ \Rightarrow a_{av} > ۰$$

گزینهٔ «۳» (۰ تا $t_۳$): در این بازه جابه‌جایی منفی و شتاب متوسط نیز منفی است.

$$\Delta x = S_۱ - S_۲ - S_۳ \xrightarrow{S_۱=S_۲} \Delta x = -S_۳ < ۰ \Rightarrow v_{av} < ۰$$

$$\Delta v < ۰ \Rightarrow a_{av} < ۰$$

گزینهٔ «۴» ($t_۳$ تا $t_۴$): در این بازه جابه‌جایی مثبت و شتاب متوسط نیز مثبت است.

$$\Delta x = S_۴ > ۰ \Rightarrow v_{av} > ۰, \Delta v > ۰ \Rightarrow a_{av} > ۰$$

۱۹) خودرویی در مسیری مستقیم با تندی ثابت $۱۵\frac{m}{s}$ در حرکت است که ناگهان مانع ساکنی را در جلوی خود می‌بینند و با شتاب ثابتی به بزرگی $۲/۵\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌کند، اگر در لحظه‌ای که راننده ترمز می‌گیرد، مانع در فاصله ۴۰ متری از خودرو باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) خودرو در فاصله ۵ متری از مانع متوقف می‌شود.

۲) خودرو با تندی $۵\sqrt{۱۷}\,\frac{m}{s}$ به مانع برخورد می‌کند.

۳) خودرو با تندی $۵\frac{m}{s}$ به مانع برخورد می‌کند.

۴) خودرو در فاصله ۳ متری از مانع متوقف می‌شود.

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت می‌توانیم جابه‌جایی خودرو از لحظه ترمز تا لحظه توقف $(v = ۰)$ را به‌دست آوریم.

$$v^۲ = v_۰^۲ + ۲a\Delta x \xrightarrow{a=-۲/۵\frac{m}{s^۲}} ۰ = ۱۵^۲ + ۲(-۲/۵)\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{۱۵\times۱۵}{۵} = ۴۵\,m$$

چون از لحظه ترمز گرفتن فاصله مانع تا خودرو $۴۰\,m$ است، پس اتومبیل قبل از توقف، به مانع برخورد می‌کند. اگر دوباره از معادله سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت استفاده کنیم، سرعت خودرو را پس از $۴۰\,m$ یعنی در لحظه برخورد با مانع به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲ = ۱۵^۲ + ۲(-۲/۵)\times۴۰ \Rightarrow v^۲ = ۲۲۵ - ۲۰۰ = ۲۵ \Rightarrow |v| = ۵\frac{m}{s}$$

پس خودرو با تندی $۵\frac{m}{s}$ به مانع برخورد می‌کند.

۲۰) متحرکی از حال سکون و با شتاب ثابت بر روی خط راست شروع به حرکت می‌کند. نسبت اندازه‌ی جابه‌جایی متحرک در ثانیه‌ی چهارم به اندازه‌ی جابه‌جایی آن در ثانیه‌ی سوم، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ **۲)** $\frac{۱۶}{۹}$ **۳)** $\frac{۴۹}{۲۵}$ **۴)** $\frac{۷}{۵}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی متحرک در ثانیه‌ی nام از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید. داریم:

$$\Delta x_n = [\underbrace{\tfrac{1}{۲}an^۲ + v_۰ n}_{\text{جابه‌جایی از } t=۰ \text{ تا } t=n}] - [\underbrace{\tfrac{1}{۲}a(n-۱)^۲ + v_۰(n-۱)}_{\text{جابه‌جایی از } t=۰ \text{ تا } t=n-۱}]$$

$$= \tfrac{1}{۲}a(n^۲ - (n-۱)^۲) + v_۰ \Rightarrow \Delta x_n = \tfrac{1}{۲}a(۲n-۱) + v_۰$$

$$\xrightarrow{v_۰=۰} \Delta x_n = \tfrac{1}{۲}a(۲n-۱)$$

$$\frac{\Delta x_۴}{\Delta x_۳} = \frac{\frac{1}{۲}a(۲(۴)-۱)}{\frac{1}{۲}a(۲(۳)-۱)} = \frac{۸-۱}{۶-۱} = \frac{۷}{۵}$$

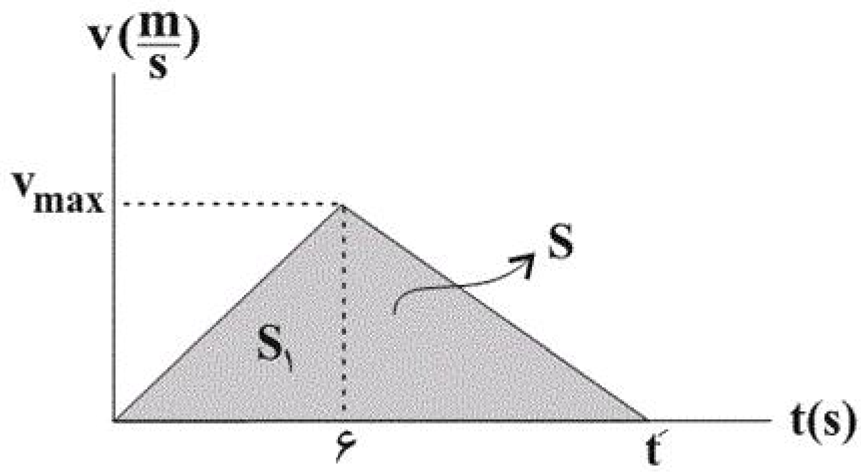
۲۱) متحرکی از حال سکون و در مسیری مستقیم با شتاب ثابت a_1 شروع به حرکت می‌کند. در لحظه $t = ۶s$ شتاب حرکت متحرک تغییر می‌کند و با شتاب ثابت a_2 حرکت خود را تا لحظه‌ای که متوقف شود، ادامه می‌دهد. اگر مسافت طی شده توسط متحرک در ۶ ثانیه اول $\frac{1}{3}$ کل مسافت طی شده توسط متحرک باشد، در کل مدت زمان حرکت چند ثانیه حرکت متحرک کندشونده است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۸
۳) ۸
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

مساحت محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان برابر با جابه‌جایی است.

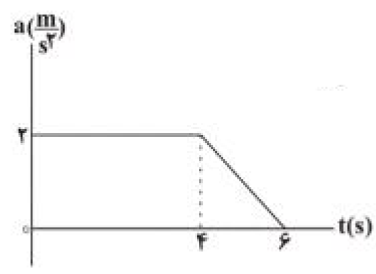


$S_1 = \frac{۶v_{max}}{۲} = ۳v_{max}$, $S = \frac{v_{max} \times t'}{۲}$

$\frac{S_1}{S} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۳v_{max}}{\frac{v_{max}}{۲} \times t'} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow t' = ۱۸\ s$

$۱۸ - ۶ = ۱۲\ s$ =مدت زمانی که حرکت متحرک کندشونده است.

۲۲) نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x ها حرکت می کند، به صورت شکل زیر است. اگر در لحظه ی t=۶s بزرگی سرعت آن $۸\frac{m}{s}$ و در خلاف جهت محور xها در حال حرکت باشد، سرعت آن در مبدا زمان چند متر بر ثانیه بوده است؟



۱) ۱۸-
۲) ۲-
۳) ۱۰
۴) ۸-

پاسخ: گزینه ۱

گزینه ۱

می دانیم سطح زیر نمودار a - t با محور زمان برابر تغییرات سرعت متحرک است، بنابراین می توان نوشت:

$\triangle v = S \Rightarrow v_۶ - v_۰ = S$

$\Rightarrow -۸ - v_۰ = \left(\frac{۴+۶}{۲}\right) \times ۲ = ۱۰ \Rightarrow v_۰ = -۱۸\frac{m}{s}$

۲۳ متحرکی مسیری مستقیم به‌طول ۲۰ متر را با شتاب ثابت در مدت زمان ۴ ثانیه می‌پیماید. اگر متحرک در ثانیهٔ آخر حرکتش ۸ متر را پیموده باشد، سرعت اولیهٔ حرکت آن چند واحد SI بوده است؟

۱) ۰/۵
۲) ۱
۳) ۱/۵
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

با توجه به معادله حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم، داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$\xrightarrow{t=4s} 20 = 8a + 4v_0 \Rightarrow 2a + v_0 = 5 \quad (1)$$

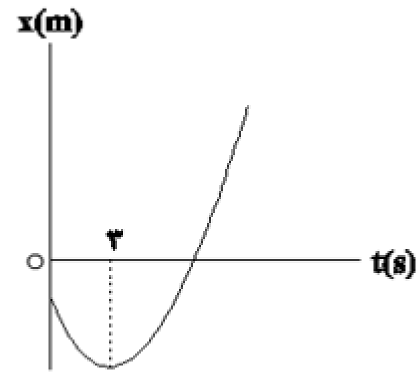
متحرک در ثانیهٔ آخر مسافت ۸m را می‌پیماید. بنابراین در سه ثانیهٔ ابتدایی حرکت مسافت ۱۲m را پیموده است. داریم:

$$12 = \frac{9}{2}a + 3v_0 \Rightarrow 3a + 2v_0 = 8 \quad (2)$$

با حل هم‌زمان معادله‌های (۱) و (۲)، داریم:

$$a = 2\frac{m}{s^2} \quad , \quad v_0 = 1\frac{m}{s}$$

۲۴) نمودار مکان – زمان متحرکی که روی محور xها با شتاب ثابت در حال حرکت است، مطابق سهمی شکل زیر است. اگر تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۸\,s$، برابر با $۲۰\frac{m}{s}$ باشد، جهت حرکت متحرک در چند متری از مبدأ حرکت تغییر می‌کند؟



۱) ۶

۲) ۱۲

۳) ۱۸

۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

شیب خط مماس بر نمودار مکان –زمان در لحظه $t = ۳s$ برابر با صفر است. بنابراین سرعت متحرک در لحظه $t = ۳s$ برابر با صفر است.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۸-۳=۵\,s]{v_{(t=۳s)}=۰\,,\,v_{(t=۸s)}=۲۰\frac{m}{s}} a = \frac{۲۰}{۵} = ۴\frac{m}{s^۲}$$

اکنون با توجه به رابطه سرعت در حرکت با شتاب ثابت، سرعت اولیه متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[t=۳s\,,\,a=۴\frac{m}{s^۲}]{v_{(t=۳s)}=۰} v_۰ = -۱۲\frac{m}{s}$$

اکنون با توجه به رابطه مکان – زمان در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی متحرک را در سه ثانیه اول حرکت به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x = x - x_۰ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t \xrightarrow{t=۳\,s} \Delta x = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۳^۲ - ۱۲ \times ۳$$

$$\Rightarrow \Delta x = ۱۸ - ۳۶ = -۱۸m$$

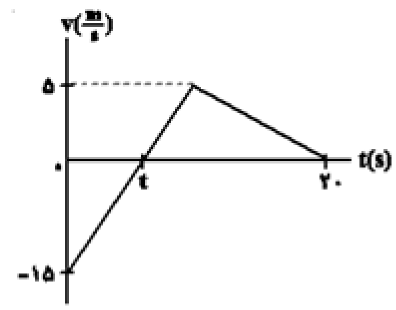
بنابراین هنگامی‌که جهت حرکت متحرک در لحظه $t = ۳s$ عوض می‌شود، متحرک در ۱۸ متری از مبدأ حرکت قرار دارد.

راه دوم: می‌توانیم حرکت متحرک را برعکس فرض کنیم، یعنی فرض کنیم متحرک از حال سکون با شتاب $۴\frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت می‌کند. اکنون جابه‌جایی متحرک پس از ۳ ثانیه برابر با فاصله متحرک از مبدأ حرکت در لحظه تغییر

جهت است:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۳^۲ = ۱۸m$$

۲۵) نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. سرعت متوسط متحرک در مدت زمانی‌که در جهت محور x حرکت می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟



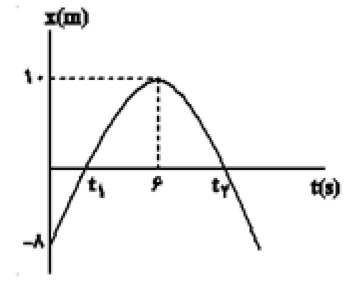
۱) ۲/۵
۲) ۵
۳) ۷/۵
۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینه ۱

در مدت زمانی که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، سرعت آن مثبت است. بنابراین با استفاده از مساحت محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان که بیان‌گر جابه‌جایی متحرک است، می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{s}{\Delta t} = \frac{\frac{(۲۰-t)\times ۵}{۲}}{(۲۰-t)} \Rightarrow v_{av} = ۲/۵\frac{m}{s}$$

۲۶) نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق سهمی شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 چند متر بر مجذور ثانیه می‌باشد؟



۱) -۱
۲) -۲
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به این‌که نمودار مکان ـ زمان متحرک به‌صورت سهمی است، شتاب آن ثابت می‌باشد و شتاب متوسط آن در هر بازه زمانی دلخواه همان شتاب ثابت حرکت است. بنابراین برای بازه زمانی صفر تا ۶ ثانیه می‌توان نوشت:

$$\frac{v+v_0}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{0+v_0}{2} = \frac{10-(-8)}{6} \Rightarrow v_0 = 6\frac{m}{s}$$

و در آخر با استفاده از تعریف شتاب داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2-v_1}{t_2-t_1} = \frac{0-6}{6-0} = -1\frac{m}{s^2}$$

۲۷) معادله مکان – زمان متحرکی در SI به‌صورت $x = 2mt^2 - (m^2+4)t+2$ می‌باشد. اگر بردار مکان این متحرک در لحظه $t_1 = 2s$ تغییر جهت بدهد و مکان متحرک در لحظه $t_2 = 1s$ برابر با (-۵) متر باشد، m در SI کدام است؟

۱) ۱ و ۳ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) -۱ و ۳

پاسخ: گزینه ۳

برای آنکه علامت x در لحظه $t = 2s$ عوض شود، باید متحرک در $t = 2s$ در مبدأ مکان حضور داشته باشد.

$$x = 2m(2)^2 - (m^2+4)(2)+2 = 0$$

$$\Rightarrow 8m - 2m^2 - 8 + 2 = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)(m-3) = 0 \Rightarrow m = 1,\ 3$$

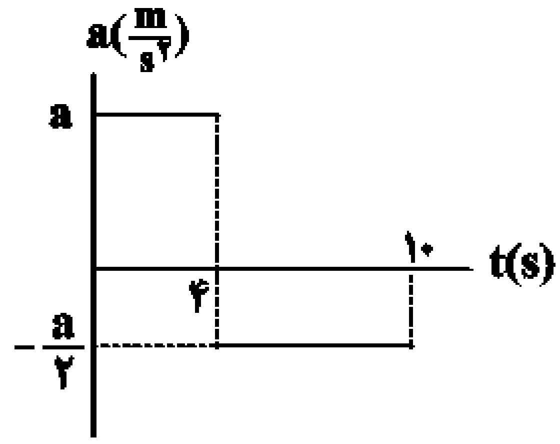
از طرفی متحرک در $t = 1s$ در مکان $x = -5m$ قرار دارد، پس:

$$-5 = 2m(1)^2 - (m^2+4)(1)+2$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m-3)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 3,\ -1$$

به ازای $m = 3$، هر دو شرط ذکر شده در صورت سؤال برقرار است.

۲۸) نمودار شتاب – زمان حرکت متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر سرعت اولیه متحرک در SI برابر با $-۱۲\vec{i}$ و جابه‌جایی آن در ۱۰ ثانیه اول حرکتش برابر با $-۵\vec{i}$ واحد SI باشد، شتاب a چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

در چهار ثانیه اول حرکت، متحرک با شتاب a حرکت کرده است، بنابراین با توجه به این که سرعت اولیه آن برابر با $(-۱۲)\frac{m}{s}$ است، سرعت آن در لحظه $t = ۴s$ برابر است با:

$$v_۴ = at + v_۰ \Rightarrow v_۴ = a \times ۴ - ۱۲ \Rightarrow v_۴ = ۴a - ۱۲$$

در شش ثانیه بعدی حرکت، متحرک با شتاب $(\frac{-a}{۲})$ حرکت کرده است. بنابراین داریم:

$$v_{۱۰} = \frac{-a}{۲}t + v_۴ \Rightarrow v_{۱۰} = \frac{-a}{۲} \times ۶ + (۴a - ۱۲)$$

$$\Rightarrow v_{۱۰} = a - ۱۲$$

حال با توجه به رابطه مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت $(\Delta x = \frac{v+v_۰}{۲}\Delta t)$، جابه‌جایی متحرک را در هر مرحله حساب کرده و با هم جمع می‌کنیم.

$$\Delta x_R = \frac{v_۰+v_۴}{۲} \times \Delta t_۱ + \frac{v_۴+v_{۱۰}}{۲}\Delta t_۲$$
$$\Rightarrow -۵ = \left[\frac{(-۱۲)+(۴a-۱۲)}{۲} \times ۴\right] + \left[\frac{(۴a-۱۲)+(a-۱۲)}{۲} \times ۶\right]$$
$$\Rightarrow a = ۵\frac{m}{s^۲}$$

۲۹ مطابق شکل زیر قطار (۲) به طول ۴۰۰ متر با تندی ثابت $۱۰۸\frac{km}{h}$ و قطار (۱) به طول ۳۰۰ متر با تندی ثابت $۵۴\frac{km}{h}$ به‌طرف یکدیگر در مسیری مستقیم و در دو ریل موازی در حال حرکت هستند. اگر مکان جلوی دو قطار در یک لحظه برابر با $x_A = -۲۰۰m$ و $x_B = ۶۰۰m$ باشد، در لحظه‌ای که دو قطار به طور کامل از کنار یک‌دیگر عبور می‌کنند، مکان نقطه A کدام است؟

۱) ۳۰۰m
۲) صفر
۳) ۱۰۰m
۴) ۵۰۰m

پاسخ: گزینه ۱

دو قطار زمانی از کنار هم به‌طور کامل رد می‌شوند که مکان انتهای دو قطار یکسان شود. بنابراین معادله مکان ـ زمان دو قطار را برای انتهای آن‌ها می‌نویسیم:

$v_۱ = ۵۴\frac{km}{h} = \frac{۵۴}{۳/۶}\frac{m}{s} = ۱۵\frac{m}{s}$ درجهت مثبت محور x

$v_۲ = -۱۰۸\frac{km}{h} = \frac{-۱۰۸}{۳/۶}\frac{m}{s} = -۳۰\frac{m}{s}$ درجهت منفی محور x

$$x'_A = x_A - \ell_۱ = -۲۰۰ - ۳۰۰ = -۵۰۰m$$

$$x'_B = x_B + \ell_۲ = ۶۰۰ + ۴۰۰ = ۱۰۰۰m$$

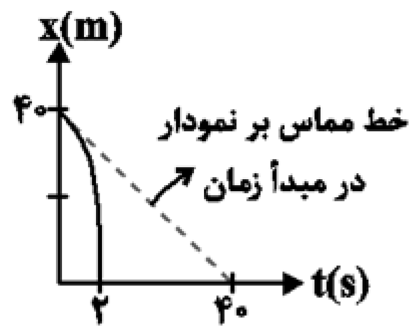
قطار (۱) $x_۱ = v_۱ t + x'_A \Rightarrow x_۱ = ۱۵t - ۵۰۰$

قطار (۲) $x_۲ = v_۲ t + x'_B \Rightarrow x_۲ = -۳۰t + ۱۰۰۰$

$$\xrightarrow{x_۱ = x_۲} t = \frac{۱۵۰۰}{۴۵} = \frac{۱۰۰}{۳}s$$

$$\xrightarrow[x_A = ۱۵t - ۲۰۰]{t = \frac{۱۰۰}{۳}s} x_A = ۱۵ \times \frac{۱۰۰}{۳} - ۲۰۰ = ۳۰۰m$$

۳۰) نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی محور xها حرکت می‌کند مطابق شکل زیر است. سرعت این متحرک در لحظه‌ای که از مبدأ مکان عبور می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۲۸-

۲) ۳۸-

۳) ۲۹-

۴) ۳۹-

پاسخ: گزینه ۴

شیب خط مماس بر منحنی x − t در لحظه t = ۰ برابر با سرعت اولیه است.

$$v_۰ = -\frac{۴۰}{۴۰} = -۱\frac{m}{s}$$

در لحظه t = ۲s متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد و خواهیم داشت:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow ۰ = \frac{۱}{۲}a(۲)^۲ + (-۱)(۲) + ۴۰$$

$$\Rightarrow ۲a = -۳۸ \Rightarrow a = -۱۹\frac{m}{s^۲}$$

$$v = at + v_۰ = (-۱۹)(۲) + (-۱) = -۳۹\frac{m}{s}$$

راه دوم: با استفاده از رابطه مستقل از شتاب داریم:

$$\frac{v+v_۰}{۲} = \frac{x-x_۰}{۲} = \frac{-۴۰}{۲} \xrightarrow{v_۰=-۱\frac{m}{s}} v = -۳۹\frac{m}{s}$$