

کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل دوم : معادلات و حل مسئله

مهر داد عباسپور

(۱) حل معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به شرط $(a \neq 0)$:

ابتدا عدد $\Delta = b^2 - 4ac$ را به دست می‌آوریم. سپس :

(الف) اگر Δ مثبت باشد، معادله دو ریشه (ساده) دارد : $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

(ب) اگر Δ صفر باشد، معادله یک ریشه (مضاعف) دارد : $x = \frac{-b}{2a}$

(پ) اگر Δ منفی باشد، معادله ریشه ندارد.

تذکر : در حالتی که b زوج باشد و نصف آن را b' بنامیم :

$$\Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

۱- یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$ ، $x = 3$ است. معادله‌ی $mx^2 + 2mx - 3 = 0$

ریشه ندارد. مقدار m کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$-4 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1) \quad \checkmark$$

$$x=3 \rightarrow 9 + 6m + m^2 - 1 = 0 \rightarrow m^2 + 6m + 8 = 0$$

$$\rightarrow (m+2)(m+4) = 0$$

$$\begin{cases} m = -2 \rightarrow -2x^2 - 4x - 3 = 0 \quad \Delta' = 4 - 4 < 0 \quad \checkmark \\ m = -4 \end{cases}$$

$$\& \Delta' = m^2 + 4m < 0 \rightarrow -4 < m < 0$$

ریشه‌ی مضاعف در معادله‌ی درجه دوم

اگر x_0 ریشه‌ی معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشد :

(۱) ریشه در معادله صدق می‌کند.

$$(۲) x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$(۳) \Delta = 0$$

$$(۴) ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

۲- اگر معادله‌ی $ax^2 + (a-1)x + b = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف $x=2$ باشد، مقدار b کدام است؟

$$\frac{6}{5} \text{ (۴)}$$

$$\frac{4}{5} \text{ (۳) ✓}$$

$$\frac{4}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۱)}$$

$$x=2 \rightarrow \varepsilon a + 2a - 2 + b = 0$$

$$x=2 = \frac{-B}{2A} \rightarrow 2 = -\frac{a-1}{2a} \rightarrow \varepsilon a = -a+1 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

(۲) رابطه‌ی بین ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

با فرض اینکه معادله‌ی دو ریشه برابر α و β دارد:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$D = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$$

$$\alpha, \beta > 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم :

$\Delta > 0, P > 0 \Rightarrow$ دو ریشه هم‌علامت

$S > 0 \Rightarrow$ دو ریشه مثبت‌اند.

$S < 0 \Rightarrow$ دو ریشه منفی‌اند.

هرجا شرط $P < 0$ ای‌نوسیم می‌آید به نوشتن طرف $\Delta > 0$ نسبت چون خود به خود برقرار می‌شود.

$P < 0 \Rightarrow$

دو ریشه غیر هم‌علامت

$S > 0 \Rightarrow$ ریشه‌ی مثبت از نظر مقداری بزرگتر

$S < 0 \Rightarrow$ ریشه‌ی منفی از نظر مقداری بزرگتر

$+ , + : \Delta > 0, P > 0, S > 0$

$- , - : \Delta > 0, P > 0, S < 0$

$\checkmark + , - : P < 0$

$\oplus, \ominus : S > 0$
 $\oplus, \ominus : S < 0$

۳- معادله $(m-2)x^2 + (2m+2)x + m+3 = 0$ دو ریشه دارد که یکی مثبت و دیگری منفی

است. اگر قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت بزرگتر باشد، مجموعه جواب m به صورت

بازه‌ی (a, b) است. مقدار $b - a$ کدام است؟

\ominus, \oplus

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)

$P < 0$

$$\frac{m+3}{m-2} < 0$$

$S < 0$

$$-\frac{2m+2}{m-2} < 0$$



$$\rightarrow -3 < m < -1$$

۴- نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + (m+3)$ محور x ها را در دو نقطه با طول منفی قطع

می کند. محدوده ی تغییرات m کدام است؟

$$-3 < m < -1 \quad (۴)$$

$$-3 < m < -2 \quad (۳) \quad \checkmark$$

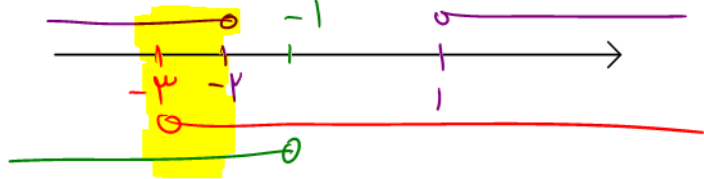
$$-2 < m < -1 \quad (۲)$$

$$m < -3 \quad (۱)$$

$$\Delta' > 0 : (m+1)^2 - (m+3) > 0 \rightarrow m^2 + m - 2 > 0 \rightarrow (m-1)(m+2) > 0$$

$$P > 0 : m+3 > 0 \rightarrow m > -3$$

$$S < 0 : 2(m+1) < 0 \rightarrow m < -1$$



روش‌های مختلف حل مسئله‌های روابط بین ریشه‌ها

(۱) به دست آوردن ریشه‌ها

(۲) استفاده از P و S

(۳) استفاده از رابطه‌ی معادله

(۴) روابط غیر متقارن

تذکر مهم :

در مسئله‌هایی که قرار است مقدار یک مجهول را تعیین کنید شرط $\Delta > 0$ فراموش نشود.

در معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، حاصل $\frac{\alpha}{2\beta^2 - 1} + \frac{\beta}{2\alpha^2 - 1}$ را بیابید.

$$\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} =$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 = 3x \\ 2\alpha^2 - 1 = 3\alpha \\ 2\beta^2 - 1 = 3\beta \end{cases}$$

$$\frac{D^2 - 4P}{4P} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)}{4\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{9}{4} + 2}{-2} = \left(-\frac{17}{4}\right)$$

در معادله $x^2 + mx - 3m - 2 = 0$ ، اگر $\alpha = -2\beta$ باشد، مقدار m ؟

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -2\beta \\ \alpha + \beta = -m \\ \alpha\beta = -3m - 2 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} -\beta = -m \rightarrow \beta = m / \alpha = -2m \\ -2m^2 = -3m - 2 \rightarrow 2m^2 - 3m - 2 = 0 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 2 : x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Delta > 0 \quad \checkmark \\ m = -\frac{1}{2} : x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad \Delta > 0 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

۵- در معادله $2x^2 + 3x - 2 = 0$ ، اگر α و β ریشه‌ها باشند، حاصل $\frac{2\alpha+1}{\beta+1} + \frac{2\beta+1}{\alpha+1}$ کدام است؟

$$-4 \quad (4)$$

$$-3 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$



$$\alpha = -2, \beta = \frac{1}{2}$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$\frac{-3}{\frac{3}{2}} + \frac{2}{-1} = -5$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{2} \left\{ \begin{array}{l} -2 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

۴- ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + m = 0$ اعداد $\frac{1}{\cos \theta}$ و $\frac{1}{\sin \theta}$ هستند. مقدار مثبت m کدام است؟

$$\sqrt{10} - 1 \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$\sqrt{7} - 1 \quad (۳)$$

$$\sqrt{5} - 1 \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} - 1 \quad (۱)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \beta = \frac{1}{\cos \theta} \rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\alpha}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\beta}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 \beta^2 \rightarrow 9 - 2m = m^2 \rightarrow m^2 + 2m - 9 = 0$$

$$m = -1 \pm \sqrt{10}$$

۷- در معادله $3x^2 - 6x + m - 1 = 0$ بین ریشه‌ها رابطه‌ی $\alpha^2 + 2\beta = 20$ برقرار است. m کدام

است؟ $x^2 - 2x + \frac{m-1}{3} = 0$

-۶۲ (۴)

-۵۱ (۳)

-۴۷ (۲)

-۲۳ (۱)

$$x^2 - 2x + \frac{m-1}{3} = 0 \rightarrow x^2 = 2x - \frac{m-1}{3}$$

$$2\alpha - \frac{m-1}{3} + 2\beta = 20 \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = \frac{m-1}{3} + 20$$

$$2 = \frac{m-1}{3} + 20 \rightarrow m = -47$$

۸- یکی از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 - (2a+1)x + 2 = 0$ از دو برابر ریشه‌ی دیگری واحد بیشتر است. مقدار کوچکتر a کدام است؟

$$a = \frac{1}{6} \quad (۲)$$

$$a = \frac{1}{5} \quad (۳) \checkmark$$

$$a = \frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$a = \frac{1}{3} \quad (۱)$$

$$\beta = 2\alpha + 1$$

$$\alpha + \beta = \frac{2a+1}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{2}{a}$$

$$3\alpha + 1 = \frac{2a+1}{a} \rightarrow 3\alpha = \frac{2a+1}{a} - 1 = \frac{a+1}{a}$$

$$\alpha = \frac{a+1}{3a} \Rightarrow \beta = 2\left(\frac{a+1}{3a}\right) + 1 = \frac{2a+2}{3a} + 1 = \frac{5a+2}{3a}$$

$$\frac{2a^2 + 5a + 2}{9a^2} = \frac{2}{a} \rightarrow 2a^2 + 5a + 2 = 18a$$

$$2a^2 - 13a + 2 = 0 \rightarrow (2a-1)(a-2) = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}, 2$$

نوشتن معادله‌ی درجه دوم با ریشه‌های مشخص

$$\alpha, \beta \rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta \\ P = \alpha\beta \end{cases} \rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow \alpha, \beta$$

معادله جدید : $2\alpha - 1, 2\beta - 1$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = 5 \\ P = \alpha\beta = 3 \end{cases}$$

$$S^* = (2\alpha - 1) + (2\beta - 1) = 2(\alpha + \beta) - 2 = 2S - 2 = 2(5) - 2 = 10 - 2 = 8$$

$$P^* = (2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 1 = 4P - 2S + 1 = 4(3) - 2(5) + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$$

$$x^2 - 8x + 3 = 0$$

تبدیل / $y = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{y+1}{2}$ $\xrightarrow{x^2 - 5x + 3 = 0}$

$$\left(\frac{y+1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{y+1}{2}\right) + 3 = 0$$

یا $\xrightarrow{\text{تبدیل}} y^2 - 8y + 3 = 0$

۹- ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ ، جذر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 12x + 4 = 0$ هستند.

$$\alpha + \beta = 12, \quad \alpha\beta = 4$$

مقدار $b - a$ کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲) ✓

۷ (۱)

$$S^* = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{12 + 2\sqrt{4}} = 4$$

$$P^* = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{4} = 2$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2 \rightarrow (y^2)^2 - 12y^2 + 4 = 0$$

مؤثر

$$y^4 - 12y^2 + 4 = 0 \quad (y^2 + 2)^2 - 4y^2 - 12y^2 = 0 \rightarrow (y^2 + 2)^2 - 16y^2 = 0$$

$$(y^2 + 2 - 4y)(y^2 + 2 + 4y) = 0$$

$$\begin{cases} y^2 - 4y + 2 = 0 \quad \checkmark \\ y^2 + 4y + 2 = 0 \quad \times \end{cases}$$

۱۹

نوشتن معادله با ریشه‌ی مشخص و ضرایب گویا

$$x = \sqrt{2} + 1$$

$$\text{مثال ۲} / \alpha = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \beta = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 - 2 = -1 \end{cases} \rightarrow \underline{x^2 - 2x - 1 = 0}$$

$$\text{مثال ۲} / x = \sqrt{2} + 1 \rightarrow x - 1 = \sqrt{2} \rightarrow (x - 1)^2 = 2 \rightarrow \underline{x^2 - 2x - 1 = 0}$$

۱۰- اگر a و b اعدادی گویا و $2\sqrt{3}-4$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2+ax+b=0$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۴ (۴)

-۴ (۳)

-۱۲ (۲)

۱۲ (۱) ✓

$$\begin{aligned} \alpha &= -\varepsilon + 2\sqrt{3} \\ \beta &= -\varepsilon - 2\sqrt{3} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = -1 \\ p = 14 - 12 = \varepsilon \end{array} \right. \quad x^2 + 1x + \varepsilon = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\sqrt{3} - \varepsilon \rightarrow x + \varepsilon = \sqrt{3} \rightarrow x^2 + 1x + 14 = 12 \rightarrow \\ & x^2 + 1x + \varepsilon = 0 \end{aligned}$$

معادلات درجه سوم، رادیکالی، کسری، تغییر متغیر

$$x + \sqrt{2x-1} = 5 \rightarrow \sqrt{2x-1} = 5-x$$

$$\left[\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2, B \geq 0 \right]$$

با اینکه شرط روی ضلع باشد و
آ فرضاً با توان زوج کنید

$$5-x \geq 0 \quad x^2 - 10x + 25 = 2x-1$$

$$x^2 - 12x + 24 = 0 \quad x = 9 \pm \sqrt{10} \xrightarrow{x \leq 5} x = 9 - \sqrt{10}$$

۱۱- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر آن

(سراسری ریاضی فارغ ۸۷)

کدام است؟

$$\frac{3}{2} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۳)}$$

$$-\frac{3}{2} \text{ (۲) ✓}$$

$$-2 \text{ (۱)}$$

$$2(2a - 1) = 2 \rightarrow a = 2 \rightarrow x(2x^2 - x - 5) = 2 \rightarrow$$

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \rightarrow (x - 2)(2x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow \alpha + \beta = -\frac{3}{2} \\ &\hookrightarrow -1, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

۱۲- معادله $\frac{a}{x^2+x} + \frac{3}{x^2-x} = \frac{1}{x^2-1}$ ریشه ندارد. مجموع مقادیر a کدام است؟

$$\frac{5}{2} (۴) \quad \frac{3}{2} (۳) \quad \frac{1}{2} (۲) \quad ۱ (۱)$$

$$\frac{a(x-1)}{x(x+1)(x-1)} + \frac{3(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1x}{(x-1)(x+1)x} \rightarrow$$

$$ax - a + 3x + 3 = x \rightarrow \boxed{(a+2)x = a-3} *$$

$$\boxed{۱} \quad x=0 \rightarrow \boxed{a=-2}$$

۲) ریشه خارج صفر است
ریشه ناممکن

$$* \left\{ \begin{array}{l} x=0 \rightarrow \boxed{a=3} \\ x=1 \rightarrow a+2 = a-3 \end{array} \right.$$

$$x=-1 \rightarrow -a-2 = a-3 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

(سراسری تیربی فارغ ۹۱)

۱۳- اگر $2a + \sqrt{3a+16} = 1$ باشد، عدد $4a+9$ ، کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۵ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱) ✓

$$\sqrt{3a+16} = 1-2a$$

$$1-2a > 0$$

$$\varepsilon a^2 - \varepsilon a + 1 = 3a + 16 \rightarrow \varepsilon a^2 - 7a - 15 = 0$$

$$a = \frac{7 \pm 17}{\varepsilon} \begin{cases} 3 \times \\ -2/\varepsilon \end{cases}$$

$$a = -2/\varepsilon \rightarrow \varepsilon a + 9 = \varepsilon$$

۱۴- معادله $x^4 + (m-1)x^2 + (m^2 - 4) = 0$ سه ریشه دارد. ریشه‌ی بزرگتر کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴) ✓

$\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$x^2 = t \quad \begin{cases} t_1 = 0 : x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ t_2 > 0 : x^2 = t_2 \rightarrow x = \pm\sqrt{t_2} \end{cases}$$

یک ریشه معقول بزرگتر است

$$t^2 + (m-1)t + m^2 - 4 = 0$$

$t = 0 \rightarrow m^2 - 4 = 0 \rightarrow m = 2, -2$

$m = 2 : t^2 + t = 0 \rightarrow t = 0, -1$ ✗

$m = -2 : t^2 - 3t = 0 \rightarrow t = 0, 3$ ✓

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 3 \end{cases} \rightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$$

۱۵- معادله‌ی $x - m\sqrt{x} + m + 2 = 0$ دو ریشه دارد که مجموع آنها برابر ۲۰ است. مقدار m کدام است؟

-۴ (۴)

-۶ (۳)

۶ (۲) ✓

۸ (۱)

$$\sqrt{x} = t \rightarrow t^2 - mt + m + 2 = 0 \quad \leftarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = t_1 > 0 \\ \sqrt{x} = t_2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = t_1^2 \\ x_2 = t_2^2 \end{cases} \rightarrow x_1 + x_2 = t_1^2 + t_2^2 = 20 \rightarrow$$

$$\Delta^2 - 4P = 20 \rightarrow m^2 - 2(m+2) = 20 \rightarrow m^2 - 2m - 24 = 0$$

$$\begin{cases} m = 6 : t^2 - 6t + 8 = 0 \quad t = 2, 4 \checkmark \\ m = -8 : t^2 + 8t - 2 = 0 \quad t_1 > 0, t_2 < 0 \quad \times \end{cases}$$

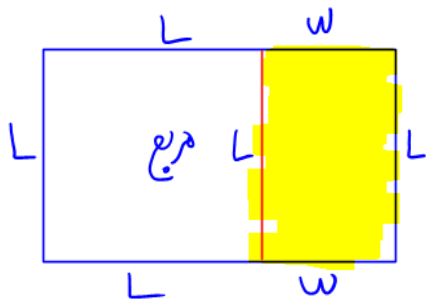
۲۷

مسئله‌های معروف

(۱) مستطیل طلایی: بخذف مربعی از دو گوشه در شکل مستطیل باقی مانده با مستطیل اصلی ^۲متساوی‌الشکل.

مستطیلی که در آن نسبت «مجموع طول و عرض به طول» برابر نسبت «طول به عرض» باشد. در این مستطیل نسبت طول به عرض برابر است با:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$



$$\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} : \frac{L+w}{L} = \frac{L}{w} \rightarrow 1 + \frac{w}{L} = \frac{L}{w}$$

$$\frac{L}{w} = \varphi \rightarrow 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

(۲) مسئله‌ی تناسب معکوس

دو نفر کاری را به تنهایی در ۱۸ و ۱۲ ساعت انجام می‌دهند. اگر با هم کار کنند چقدر طول می‌کشد؟

		سرعت
فرد اول	۱۸	$\frac{1}{18}$
فرد دوم	۱۲	$\frac{1}{12}$
با هم	x	$\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow x = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5} = 7\frac{12}{60} \text{ min}$$

(۳) مسئله‌ی سرعت

$$v = \frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}} \rightarrow t = \frac{x}{v}$$

یک ماشین مسیر ۲۰ کیلومتری را با سرعت ۷ رفته و با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت سریع تر از سرعت رفت، برگشته است. اگر در مجموع نیم ساعت طول کشیده باشد، ۷ را بیابید.



$$t_{\text{رفت}} + t_{\text{برگشت}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{20}{v} + \frac{20}{v+60} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{40v + 1200}{v(v+60)} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$v^2 - 20v - 2400 = 0 \rightarrow (v-60)(v+40) = 0 \rightarrow v = 60$$

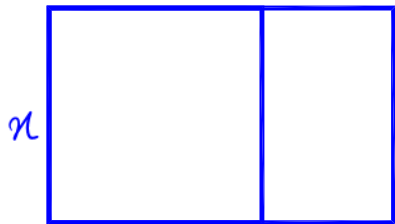
(۱۴) مسئله‌ی غلظت

برای تبدیل ۵۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴٪ به محلولی با غلظت ۸٪، دو کیلوگرم نمک اضافه کرده‌ایم. چقدر آب تبخیر کنیم تا به نتیجه‌ی مطلوب برسیم؟

$$50 \times \frac{4}{100} = 2 \Rightarrow \frac{2}{50}$$

$$\frac{2+2}{50+2-x} = \frac{8}{100} \rightarrow \frac{4}{52-x} = \frac{8}{100} \rightarrow 100 = 104 - 2x$$
$$\underline{\underline{\rightarrow x=2}}$$

۱۶- در شکل، یک مربع و دو مستطیل متشابه می بینید. اگر محیط مستطیل بزرگتر برابر ۴ باشد، طول ضلع مربع کدام است؟



$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} x$$

$$2 - \sqrt{2} \quad (۲)$$

$$2\sqrt{2} - 2 \quad (۱)$$

$$3 - \sqrt{5} \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad (۳)$$

$$2x + (\sqrt{5}+1)x = 4$$

$$x(\sqrt{5}+3) = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{4(3-\sqrt{5})}{9-5}$$

$$x = 3 - \sqrt{5}$$

۱۷- سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله‌ی ۱۲۰۰ متری

در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب v

رودخانه چند متر در دقیقه است؟

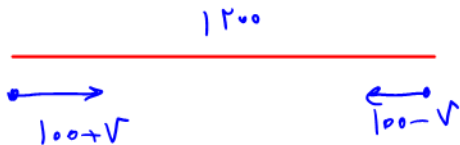
(سراسری تیرپی ۹۱)

۲۵ (۴)

۲۰ (۳) ✓

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)



$$t_1 - t_2 = 5$$

$$\frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5 \quad \xrightarrow{\div 1200}$$

$$\frac{1}{100-v} - \frac{1}{100+v} = \frac{1}{240} \rightarrow \frac{2v}{10000 - v^2} = \frac{1}{240}$$

$$4800v = 10000 - v^2 \rightarrow v^2 + 4800v - 10000 = 0 \quad (v-20)(v+80) = 0$$

$$v = 20$$

۱۸- دو کارگر اگر با هم کار کنند، کاری را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اما اگر هر کدام به تنهایی این کار را انجام دهند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می‌کند. کارگر اول به تنهایی این کار را در چند روز تمام می‌کند؟

۴۵ (۴)

۳۵ (۳)

۳۰ (۲) ✓

۲۵ (۱)

①	x	$\frac{1}{x}$
②	$x+10$	$\frac{1}{x+10}$
هم	۱۸	$\frac{1}{18}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{18}$$

$$x=30 \quad \frac{1}{30} + \frac{1}{18} = \frac{3+2}{90} = \frac{1}{18}$$

۱۹- ۲۰ کیلوگرم آب نمک با غلظت ۱۵٪ را با ۴۰ کیلوگرم آب نمک با غلظت ۲۰٪ مخلوط می‌کنیم.
چند کیلوگرم به این محلول نمک اضافه کنیم تا پس از تبخیر ۴ کیلوگرم از آب آن به غلظت ۲۵٪
برسد؟

$$4 \text{ (4)} \checkmark$$

$$3 \text{ (3)}$$

$$2 \text{ (2)}$$

$$5 \text{ (1)}$$

$$20 \times 0,15 = 3 \rightarrow \frac{3}{20}$$

$$\rightarrow \frac{1+3}{20+20} = \frac{11}{40}$$

$$40 \times 0,2 = 8 \rightarrow \frac{8}{40}$$

$$\frac{11+x}{20-x+x} = \frac{8}{40} \rightarrow \frac{11+x}{20+x} = \frac{1}{5} \rightarrow 44+x = 20+x$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

۲۰- اندازه اضلاع مثلث قائم الزاویه‌ای، به صورت $x+1$ ، $2x+1$ و $2x+3$ است. مساحت مثلث،

(سراسری ریاضی ۹۹)

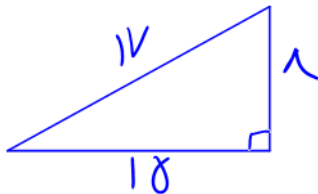
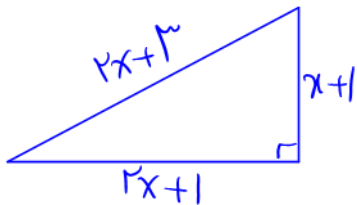
کدام است؟

۳۹ (۴)

۴۵ (۳)

۵۶ (۲)

۶۰ (۱) ✓



$$S = \frac{1 \times 18}{2} = 9$$

$$(2x+3)^2 = (2x+1)^2 + (x+1)^2$$

~~$$4x^2 + 12x + 9 = 4x^2 + 4x + 1 + x^2 + 2x + 1$$~~

$$x^2 - 9x - 7 = 0 \rightarrow x = 10$$

۳۶

آزمون

۲۱- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 + (m-2)x + m+1 = 0$ دارای دو ریشه

(سراسری تهرانی خارج ۹۷)

حقیقی مثبت است؟

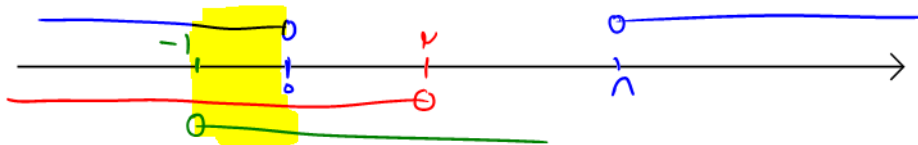
$$m > 8 \quad (۴)$$

$$2 < m < 8 \quad (۳)$$

$$m < 0 \quad (۲)$$

$$-1 < m < 0 \quad (۱) \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m-2)^2 - 4(m+1) > 0 \\ -m+2 > 0 \\ m+1 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m^2 - 8m > 0 \\ m < 2 \\ m > -1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m < 0 \text{ یا } m > 8 \\ m < 2 \\ m > -1 \end{array} \right.$$



۲۲- اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 8x + 3 = 0$ اعداد α و β باشند، مقدار $\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta^2+3}{\alpha+1}$ برابر کدام است؟

$$S=8, P=3$$

$$44 \quad (4)$$

$$42 \quad (3)$$

$$38 \quad (2)$$

$$36 \quad (1)$$

$$\alpha^2 + 3 = 8\alpha \rightarrow \beta^2 + 3 = 8\beta$$

$$\Rightarrow \frac{8\alpha}{\beta+1} + \frac{8\beta}{\alpha+1} = \frac{8\alpha(\alpha+1) + 8\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{8(\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta)}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$$

$$\frac{8(S^2 - 2P + S)}{P + S + 1} = \frac{8(64 - 6 + 8)}{3 + 8 + 1} = \frac{8 \times 66}{12} = 44$$

۲۳- معادله $(m-1)x^2 - 4x + m - 1 = 0$ دو ریشه دارد، به طوری که یک ریشه از دو برابر ریشه‌ی

دیگر ۱ واحد بیشتر است. مقدار بزرگتر m کدام است؟

۲/۶ (۴ ✓)

۲/۴ (۳)

۲ (۲)

۱/۸ (۱)

$$\begin{cases} \beta = 2\alpha + 1 \\ \alpha + \beta = \frac{4}{m-1} \\ \alpha\beta = 1 \end{cases}$$

$$\alpha(2\alpha + 1) = 1 \rightarrow 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = -1, \beta = -1 \rightarrow -2 = \frac{4}{m-1} \rightarrow m = -1 \\ \alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2 \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{m-1} \rightarrow m = 2, 9 \end{cases}$$

در صورت $\alpha = -1$ $\rightarrow (m-1) + 4 + m - 1 = 0 \Rightarrow m = -1$

در صورت $\alpha = \frac{1}{2}$ $\rightarrow m = 2, 9$

۲۴- معادله درجه دوم $3x^2 + (2m-1)x + 2-m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع

ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

(سراسری تیرپی ۹۹)

۳ (۲)

$\frac{7}{2}$ (۱) ✓

$-\frac{5}{2}$ (۴)

-۱ (۳)

$$S = \frac{1}{p} \Rightarrow Sp = 1 \rightarrow$$

$$\frac{-(2m-1)}{3} \cdot \frac{2-m}{3} = 1 \rightarrow (2m-1)(m-2) = 9 \rightarrow 2m^2 - 5m - 2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = -1 : 3x^2 - 3x + 3 = 0 \quad \Delta < 0 \quad \times \\ m = \frac{7}{2} \end{array} \right.$$

۴۰

۲۵- در یک معادله‌ی درجه دوم با ضرایب گویا، یک ریشه $۳ + \sqrt{۵}$ است. اگر معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌های آن یک واحد از ریشه‌های این معادله بیشتر باشد، به صورت $x^2 + ax + b = 0$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳) ✓

-۱ (۲)

۱ (۱)

$$\begin{cases} x_1 = ۴ + \sqrt{۵} \\ x_2 = ۴ - \sqrt{۵} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = ۱ \\ p = ۱۶ - ۵ = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow x^2 - ۸x + ۱۱ = 0 \quad \begin{cases} a = -۸ \\ b = ۱۱ \end{cases}$$

روش اول / $x = ۴ + \sqrt{۵} \rightarrow x - ۴ = \sqrt{۵} \rightarrow (x - ۴)^2 = ۵$

$$\rightarrow x^2 - ۸x + ۱۱ = 0$$

۲۶- ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 5 = 0$ اعداد α و β هستند. ریشه‌های معادله‌ی

$mx^2 - nx + 2 = 0$ اعداد $1 + \frac{1}{\alpha}$ و $1 + \frac{1}{\beta}$ هستند. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۲ (۳)

۱۳ (۲)

۱۴ (۱) ✓

$$S^* = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = 2 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 2 + \frac{S}{P}$$

$$P^* = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} = 1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} = 1 + \frac{S}{P} + \frac{1}{P}$$

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} \\ P = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S^* = 2 + \frac{1/2}{-5/2} = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5} \\ P^* = 1 + \frac{1/2}{-5/2} + \frac{1}{-5/2} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow \underline{5x^2 - 9x + 2 = 0} \quad \begin{cases} m = 5 \\ n = 9 \end{cases}$$

۲۲

۲۷- معادله‌ی درجه سوم $(m-1)x^3 - mx + 1 = 0$ دو ریشه دارد. مقدار m کدام است؟

$$\underbrace{mx^3}_{-4 \text{ (۴)}} - \underbrace{x^3}_{-3 \text{ (۳)}} - \underbrace{mx}_{-2 \text{ (۲)}} + 1 = 0 \rightarrow m(x^3 - 1) - (x^3 - 1) = 0$$

$$(x-1)(m(x+1) - (x^2+x+1)) = 0 \rightarrow mx^2 + mx - x^2 - x - 1 = 0$$

↓
 $x=1$

$$(m-1)x^2 + (m-1)x - 1 = 0 \quad *$$

ریشه‌های مختلف غیر ۱ داشته باشند (الف)
 $\Delta = (m-1)^2 + 4(m-1) = 0 \rightarrow (m-1)(m+3) = 0$

$$\Rightarrow m = 1, -3 \Rightarrow m = -3$$

یک ریشه ۱ داشته باشند (ب)
 یک ریشه ۱ دیگر داشته باشند!
 $x=1$

$$m-1 + m-1 - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

۲۸- معادله‌ی $\frac{x-k}{x^2-7x+12} + \frac{2}{x-3} = 1$ فقط یک ریشه دارد. مجموع مقادیر k کدام است؟

۱۰ (۴) ✓

۹ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

$$\frac{x-k+2(x-3)}{(x-3)(x-4)} = 1 \Rightarrow x-k+2x-6 = (x-3)(x-4)$$

$$\Rightarrow 3x-k-6 = x^2-7x+12 \Rightarrow \underline{x^2-10x+(k+18)} = 0 \quad (*)$$

① ریشه‌ها یکسان باشند و در مجموع صفرند $\Rightarrow (x-5)^2 \Rightarrow k+18=25 \Rightarrow k=7$

② ریشه‌ها یکسان نباشند که یکی صفر و دیگری صفرکننده \Rightarrow

$$\begin{cases} x=3 \rightarrow 9-30+k+18=0 \rightarrow k=1 \\ x=4 \rightarrow 16-40+k+18=0 \rightarrow k=6 \end{cases}$$

۲۹- کدام توضیح درباره‌ی ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{x^2 - 4\sqrt{2x-1}} = x - 2$ صحیح است؟

(۱) فقط یک ریشه برابر $2 + \sqrt{2}$

(۲) فقط یک ریشه برابر $2 + \sqrt{3}$

(۳) دو ریشه، تفاضل برابر $2\sqrt{2}$

(۴) دو ریشه، تفاضل برابر $2\sqrt{3}$

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4\sqrt{2x-1} = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow -4\sqrt{2x-1} = -4(x-1)$$

$$\sqrt{2x-1} = x-1 \quad (x \geq 1) \Rightarrow 2x-1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2} \xrightarrow{x \geq 2} x = 2 + \sqrt{2}$$

۳۰- معادله $x^4 - (2m-1)x^2 + m = 0$ چهار ریشه دارد و مجموع توان‌های چهارم آنها ۳۸ است،

مقدار m کدام است؟

$$3 \quad (4) \quad \frac{3}{2} \quad (3) \quad -\frac{3}{2} \quad (2) \quad -3 \quad (1)$$

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - (2m-1)t + m = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = t_1 > 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{t_1} \\ x^2 = t_2 > 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{t_2} \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{t_1})^2 + (\sqrt{t_1})^2 + (-\sqrt{t_2})^2 + (\sqrt{t_2})^2 = 38 \Rightarrow$$

$$2t_1 + 2t_2 = 38 \rightarrow t_1 + t_2 = 19 \Rightarrow \Delta - 2P = 19 \Rightarrow (2m-1)^2 - 2m = 19$$

$$4m^2 - 4m - 11 = 0 \Rightarrow$$

$$2m^2 - 2m - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m = 3 \rightarrow t^2 - 5t + 3 = 0 \quad \Delta > 0, S, P > 0 \Rightarrow \checkmark \\ m = -\frac{3}{2} \rightarrow t^2 + 8t - \frac{3}{2} = 0 \quad \times \end{cases}$$

۳۱- یکی از ریشه‌های معادله‌ی $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+1}+1} + \frac{2}{x^2+4x} = 1$ کدام است؟

$$2\sqrt{2}-2 \quad (۴)$$

$$\sqrt{7}-2 \quad (۳) \quad \checkmark$$

$$\sqrt{6}-2 \quad (۲)$$

$$\sqrt{5}-2 \quad (۱)$$

$$\sqrt{x^2+4x+1} = t \Rightarrow x^2+4x+1 = t^2 \Rightarrow x^2+4x = t^2-1 \quad t \geq 0$$

$$\frac{1}{t+1} + \frac{2}{t^2-1} = 1 \Rightarrow \frac{t-1+2}{(t-1)(t+1)} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{t-1} = 1 \Rightarrow t=2 \Rightarrow x^2+4x = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = -2+\sqrt{7} \\ x = -2-\sqrt{7} \end{cases}$$

۳۲- یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

(سراسری ریاضی فارغ ۹۲)

۰/۵ (۲)

۰/۴ (۱)

۰/۸ (۴)

۰/۶ (۳) ✓

$$11 \times 0.4 = 4.4 \quad 4 \times 0.7 = 2.8$$

$$\frac{4.4}{11}, \frac{2.8}{4} \xrightarrow{\text{مخلوط}} \frac{4.4 + 2.8}{11 + 4} = \frac{7.2}{15}$$

$$\frac{7.2}{15 - x} = \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow 14.4 = 15 - x \Rightarrow x = 0.6$$

۰/۵۰

۳۳- یک مخزن آب توسط دو شیر آب (الف) و (ب) پر می شود. برای پر کردن مخزن خالی، اگر فقط شیر (الف) را باز کنیم، ۱۰ ساعت بیشتر از اینکه فقط شیر (ب) را باز کنیم طول می کشد. اگر هر دو شیر باز باشند، ۸ ساعت کمتر اینکه شیر (ب) به تنهایی باز باشد زمان لازم است. شیر (ب) به تنهایی در چند ساعت این مخزن را پر می کند؟

	ساعت	در هر ساعت
(الف)	$n+10$	$\frac{1}{n+10}$
(ب)	n	$\frac{1}{n}$
مجموع	$n-8$	$\frac{1}{n-8}$

۴۹

۲۲ (۳)

۲۰ (۲) ✓

۱۸ (۱)

$$\Rightarrow \frac{1}{n-8} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n-8} = \frac{n+10+n}{n(n+10)} \Rightarrow$$

$$n(n+10) = (n-8)(2n+10) \Rightarrow$$

$$n^2+10n = 2n^2+10n-16n-80 \Rightarrow$$

$$n^2-16n-80 \Rightarrow (n-20)(n+4) = 0 \Rightarrow n=20$$

۳۴- سرعت حرکت یک قایق در آب آرام برابر ۷ کیلومتر در ساعت است. این قایق مسیر ۱۰ کیلومتری را رفته و پس از بیست دقیقه توقف به مکان اول برگشته است. این سفر ۲ ساعت طول کشیده است. هنگام رفت سرعت آب ۲ کیلومتر در ساعت در جهت حرکت قایق و هنگام برگشت سرعت آب ۳ کیلومتر در ساعت بر خلاف جهت حرکت قایق است. عدد ۷ کدام است؟



$$v = \frac{\lambda}{t} \Rightarrow t = \frac{\lambda}{v}$$

$$t_1 + t_2 + 20^{\text{min}} = 2^{\text{h}} \Rightarrow t_1 + t_2 = 2 - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{10}{v+2} + \frac{10}{v-3} = \frac{5}{3} \xrightarrow{\cdot 10}$$

$$\frac{1}{v+2} + \frac{1}{v-3} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{2v-1}{v^2-v-6} = \frac{1}{6} \rightarrow 12v-6 = v^2-v-6 \Rightarrow$$

$$v^2 - 13v = 0 \Rightarrow v = 0, 13$$

$$\underline{v = 13}$$

۳۵- در یک مستطیل طلایی به طول ۲ و عرض x ، عدد x در کدام معادله صدق می‌کند؟

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \quad (۴) \quad x^2 - 2x - 4 = 0 \quad (۳) \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad (۲) \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad (۱)$$

بررسی / $\frac{۲}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{۲} \rightarrow x = \frac{۴}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{۴(\sqrt{5}-1)}{۵-1}$

$$x = \sqrt{5} - 1 \rightarrow x + 1 = \sqrt{5} \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 5 \rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0$$

توی / $\frac{L+w}{L} = \frac{L}{w} \rightarrow \frac{۲+x}{۲} = \frac{۲}{x} \rightarrow x^2 + 2x = 4$