



# کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

## ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

### فصل دوم : معادلات و حل مسئله

مهر داد عباسپور

(۱) حل معادله‌ی درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  به شرط  $(a \neq 0)$  :

ابتدا عدد  $\Delta = b^2 - 4ac$  را به دست می‌آوریم. سپس :

(الف) اگر  $\Delta$  مثبت باشد، معادله دو ریشه (ساده) دارد :  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

(ب) اگر  $\Delta$  صفر باشد، معادله یک ریشه (مضاعف) دارد :  $x = \frac{-b}{2a}$

(پ) اگر  $\Delta$  منفی باشد، معادله ریشه ندارد.

تذکر : در حالتی که  $b$  زوج باشد و نصف آن را  $b'$  بنامیم :

$$\Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$



۱- یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$  ،  $x = 3$  است. معادله‌ی

$mx^2 + 2mx - 3 = 0$  ریشه ندارد. مقدار  $m$  کدام است ؟

- (۱) -۲      (۲) ۲      (۳) -۴      (۴) ۴

## ریشه‌ی مضاعف در معادله‌ی درجه دوم

اگر  $x_0$  ریشه‌ی معادله‌ی درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشد :

(۱) ریشه در معادله صدق می‌کند.

$$(۲) x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$(۳) \Delta = 0$$

$$(۴) ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

۲- اگر معادله‌ی  $ax^2 + (a-1)x + b = 0$  دارای ریشه‌ی مضاعف  $x = 2$  باشد، مقدار  $b$  کدام

است ؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$       (۲)  $\frac{4}{3}$       (۳)  $\frac{4}{5}$       (۴)  $\frac{6}{5}$

## (۲) رابطه‌ی بین ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ :

با فرض اینکه معادله‌ی دو ریشه برابر  $\alpha$  و  $\beta$  دارد :

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$D = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\alpha^2 + \beta^2$$

$$\alpha^3 + \beta^3$$

$$\alpha, \beta > 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$



## علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم :

$\Delta > 0, P > 0 \Rightarrow$	دو ریشه هم‌علامت	$S > 0 \Rightarrow$ دو ریشه مثبت‌اند. $S < 0 \Rightarrow$ دو ریشه منفی‌اند.
---------------------------------	------------------	--

$P < 0 \Rightarrow$	دو ریشه غیر هم‌علامت	$S > 0 \Rightarrow$ ریشه‌ی مثبت از نظر مقداری بزرگتر $S < 0 \Rightarrow$ ریشه‌ی منفی از نظر مقداری بزرگتر
---------------------	----------------------	--

۳- معادله‌ی  $(m-2)x^2 + (2m+2)x + m+3 = 0$  دو ریشه دارد که یکی مثبت و دیگری منفی است. اگر قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت بزرگتر باشد، مجموعه جواب  $m$  به صورت بازه‌ی  $(a, b)$  است. مقدار  $b-a$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۴- نمودار تابع  $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + (m+3)$  محور  $x$  ها را در دو نقطه با طول منفی قطع می‌کند. محدوده‌ی تغییرات  $m$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $m < -3$       ۲ (۲)  $-2 < m < -1$       ۳ (۳)  $-3 < m < -2$       ۴ (۴)  $-3 < m < -1$

## روش‌های مختلف حل مسئله‌های روابط بین ریشه‌ها

- (۱) به دست آوردن ریشه‌ها
- (۲) استفاده از  $S$  و  $P$
- (۳) استفاده از رابطه‌ی معادله
- (۴) روابط غیر متقارن

تذکر مهم :

در مسئله‌هایی که قرار است مقدار یک مجهول را تعیین کنید شرط  $\Delta > 0$  فراموش نشود.



در معادله‌ی  $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، حاصل  $\frac{\alpha}{2\beta^2 - 1} + \frac{\beta}{2\alpha^2 - 1}$  را بیابید.

در معادله‌ی  $x^2 + mx - 3m - 2 = 0$ ، اگر  $\alpha = -2\beta$  باشد، مقدار  $m$  ؟

۵- در معادله‌ی  $2x^2 + 3x - 2 = 0$ ، اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌ها باشند، حاصل  $\frac{2\alpha + 1}{\beta + 1} + \frac{2\beta + 1}{\alpha + 1}$  کدام

است ؟

- (۱) -۱      (۲) -۲      (۳) -۳      (۴) -۴

۶- ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 3x + m = 0$  اعداد  $\frac{1}{\sin \theta}$  و  $\frac{1}{\cos \theta}$  هستند. مقدار مثبت  $m$  کدام

است ؟

- (۱)  $\sqrt{3} - 1$       (۲)  $\sqrt{5} - 1$       (۳)  $\sqrt{7} - 1$       (۴)  $\sqrt{10} - 1$

۷- در معادله‌ی  $3x^2 - 6x + m - 1 = 0$  بین ریشه‌ها رابطه‌ی  $\alpha^2 + 2\beta = 20$  برقرار است.

$m$  کدام است ؟

- (۱) -۲۳      (۲) -۴۷      (۳) -۵۱      (۴) -۶۲

۸- یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $ax^2 - (2a + 1)x + 2 = 0$  از دو برابر ریشه‌ی دیگر یک واحد

بیشتر است. مقدار کوچکتر  $a$  کدام است ؟

- (۱)  $a = \frac{1}{3}$       (۲)  $a = \frac{1}{4}$       (۳)  $a = \frac{1}{5}$       (۴)  $a = \frac{1}{6}$

## نوشتن معادله‌ی درجه دوم با ریشه‌های مشخص

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow \alpha, \beta$$

معادله جدید :  $2\alpha - 1, 2\beta - 1$

۹- ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + ax + b = 0$ ، جذر ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 12x + 4 = 0$  هستند.

مقدار  $b - a$  کدام است ؟

- (۱) ۷      (۲) ۶      (۳) ۵      (۴) ۴



## نوشتن معادله با ریشه‌ی مشخص و ضرایب گویا

$$x = \sqrt{2} + 1$$

۱۰- اگر  $a$  و  $b$  اعدادی گویا و  $4 - 2\sqrt{3}$  یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + ax + b = 0$  باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۱۲      (۲) -۱۲      (۳) -۴      (۴) ۴

## معادلات درجه سه، رادیکالی، کسری، تغییر متغیر

$$x + \sqrt{2x-1} = 5$$

۱۱- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $x(ax^2 - x - 5) = 2$  برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

(سراسری ریاضی فارغ ۸۷)

- (۱) -۲      (۲)  $-\frac{3}{2}$       (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴)  $\frac{3}{2}$

۱۲- معادله‌ی  $\frac{a}{x^2+x} + \frac{3}{x^2-x} = \frac{1}{x^2-1}$  ریشه ندارد. مجموع مقادیر  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{3}{2}$       (۴)  $\frac{5}{2}$

۱۳- اگر  $1 = 2a + \sqrt{3a+16}$  باشد، عدد  $4a+9$  ، کدام است؟

(سراسری تفریحی فارغ ۹۸)

- (۱) ۴      (۲) ۶      (۳) ۱۵      (۴) ۲۱

۱۴- معادله‌ی  $x^4 + (m-1)x^2 + (m^2-4) = 0$  سه ریشه دارد. ریشه‌ی بزرگتر کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳)  $\sqrt{2}$       (۴)  $\sqrt{3}$

۱۵- معادله‌ی  $x - m\sqrt{x} + m + 2 = 0$  دو ریشه دارد که مجموع آنها برابر ۲۰ است. مقدار  $m$  کدام است؟

- (۱) ۸      (۲) ۶      (۳) -۶      (۴) -۴



## مسئله‌های معروف

### (۱) مستطیل طلایی

مستطیلی که در آن نسبت «مجموع طول و عرض به طول» برابر نسبت «طول به عرض» باشد.

در این مستطیل نسبت طول به عرض برابر است با:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

### (۲) مسئله‌ی تناسب معکوس

دو نفر کاری را به تنهایی در ۱۸ و ۱۲ ساعت انجام می‌دهند. اگر با هم کار کنند چقدر طول می‌کشد؟

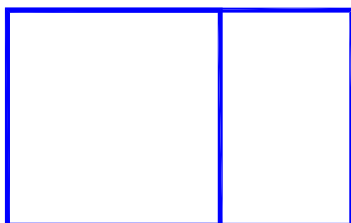
### (۳) مسئله‌ی سرعت

یک ماشین مسیر ۲۰ کیلومتری را با سرعت ۷ رفته و با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت سریع تر از سرعت رفت، برگشته است. اگر در مجموع نیم ساعت طول کشیده باشد، ۷ را بیابید.

### (۴) مسئله‌ی غلظت

برای تبدیل ۵۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴٪ به محلولی با غلظت ۸٪، دو کیلوگرم نمک اضافه کرده‌ایم. چقدر آب تبخیر کنیم تا به نتیجه‌ی مطلوب برسیم؟

۱۶- در شکل، یک مربع و دو مستطیل متشابه می‌بینید. اگر محیط مستطیل بزرگتر برابر ۴ باشد، طول ضلع مربع کدام است؟



$2 - \sqrt{2}$ (۲)	$2\sqrt{2} - 2$ (۱)
$3 - \sqrt{5}$ (۴)	$\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ (۳)

۱۷- سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله‌ی ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است.

(سراسری تبریز ۹۸)

سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟

۲۵ (۴)	۲۰ (۳)	۱۵ (۲)	۱۲ (۱)
--------	--------	--------	--------



۱۸- دو کارگر اگر با هم کار کنند، کاری را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اما اگر هر کدام به تنهایی این کار را انجام دهند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می‌کند. کارگر اول به تنهایی این کار را در چند روز تمام می‌کند؟

- ۲۵ (۱)      ۳۰ (۲)      ۳۵ (۳)      ۴۵ (۴)

۱۹- ۲۰ کیلوگرم آب نمک با غلظت ۱۵٪ را با ۴۰ کیلوگرم آب نمک با غلظت ۲۰٪ مخلوط می‌کنیم. چند کیلوگرم به این محلول نمک اضافه کنیم تا پس از تبخیر ۴ کیلوگرم از آب آن به غلظت ۲۵٪ برسد؟

- ۵ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۲۰- اندازه اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای، به صورت  $x+1$ ،  $2x+1$  و  $2x+3$  است. مساحت مثلث، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۹)

- ۶۰ (۱)      ۵۶ (۲)      ۴۵ (۳)      ۳۹ (۴)

## آزمون

۲۱- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، معادله درجه دوم  $x^2 + (m-2)x + m + 1 = 0$  دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

(سراسری تهرانی فارغ ۹۷)

- $-1 < m < 0$  (۱)       $m < 0$  (۲)       $2 < m < 8$  (۳)       $m > 8$  (۴)

۲۲- اگر ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 8x + 3 = 0$  اعداد  $\alpha$  و  $\beta$  باشند، مقدار  $\frac{8\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta^2+3}{\alpha+1}$  برابر کدام است؟

- ۳۶ (۱)      ۳۸ (۲)      ۴۲ (۳)      ۴۴ (۴)

۲۳- معادله‌ی  $(m-1)x^2 - 4x + m - 1 = 0$  دو ریشه دارد، به طوری که یک ریشه از دو برابر ریشه‌ی دیگر ۱ واحد بیشتر است. مقدار بزرگتر  $m$  کدام است؟

- ۱/۸ (۱)      ۲ (۲)      ۲/۴ (۳)      ۲/۶ (۴)

۲۴- معادله‌ی درجه‌ی دوم  $3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$  دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

(سراسری تهرانی ۹۹)

- $\frac{7}{2}$  (۱)      ۳ (۲)       $-\frac{5}{2}$  (۴)       $-1$  (۳)



۲۵- در یک معادله‌ی درجه دوم با ضرایب گویا، یک ریشه  $\sqrt{5} + 3$  است. اگر معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌های آن یک واحد از ریشه‌های این معادله بیشتر باشد، به صورت  $x^2 + ax + b = 0$  باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) -۱      (۳) ۳      (۴) -۳

۲۶- ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - x - 5 = 0$  اعداد  $\alpha$  و  $\beta$  هستند. ریشه‌های معادله‌ی  $mx^2 - nx + 2 = 0$  اعداد  $1 + \frac{1}{\alpha}$  و  $1 + \frac{1}{\beta}$  هستند. مقدار  $m + n$  کدام است؟

- (۱) ۱۴      (۲) ۱۳      (۳) ۱۲      (۴) ۱۱

۲۷- معادله‌ی درجه سوم  $(m-1)x^3 - mx + 1 = 0$  دو ریشه دارد. مقدار  $m$  کدام است؟

- (۱) -۱      (۲) -۲      (۳) -۳      (۴) -۴

۲۸- معادله‌ی  $\frac{x-k}{x^2-7x+12} + \frac{2}{x-3} = 1$  فقط یک ریشه دارد. مجموع مقادیر  $k$  کدام است؟

- (۱) ۵      (۲) ۶      (۳) ۹      (۴) ۱۰

۲۹- کدام توضیح درباره‌ی ریشه‌های معادله‌ی  $\sqrt{x^2 - 4\sqrt{2x-1}} = x - 2$  صحیح است؟

- (۱) فقط یک ریشه برابر  $2 + \sqrt{2}$       (۲) فقط یک ریشه برابر  $2 + \sqrt{3}$   
 (۳) دو ریشه، تفاضل برابر  $2\sqrt{2}$       (۴) دو ریشه، تفاضل برابر  $2\sqrt{3}$

۳۰- معادله‌ی  $x^4 - (2m-1)x^2 + m = 0$  چهار ریشه دارد و مجموع توان‌های چهارم آنها ۳۸ است، مقدار  $m$  کدام است؟

- (۱) -۳      (۲)  $-\frac{3}{2}$       (۳)  $\frac{3}{2}$       (۴) ۳

۳۱- یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+1}+1} + \frac{2}{x^2+4x} = 1$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{5} - 2$       (۲)  $\sqrt{6} - 2$       (۳)  $\sqrt{7} - 2$       (۴)  $2\sqrt{2} - 2$

۳۲- یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

- (۱) ۰/۴      (۲) ۰/۵      (۳) ۰/۶      (۴) ۰/۸  
 (سراسری ریاضی فارغ ۹۲)





۳۳- یک مخزن آب توسط دو شیر آب (الف) و (ب) پر می‌شود. برای پر کردن مخزن خالی، اگر فقط شیر (الف) را باز کنیم، ۱۰ ساعت بیشتر از اینکه فقط شیر (ب) را باز کنیم طول می‌کشد. اگر هر دو شیر باز باشند، ۸ ساعت کمتر اینکه شیر (ب) به تنهایی باز باشد زمان لازم است. شیر (ب) به تنهایی در چند ساعت این مخزن را پر می‌کند؟

- ۱۸ (۱)      ۲۰ (۲)      ۲۲ (۳)      ۲۴ (۴)

۳۴- سرعت حرکت یک قایق در آب آرام برابر ۷ کیلومتر در ساعت است. این قایق مسیر ۱۰ کیلومتری را رفته و پس از بیست دقیقه توقف به مکان اول برگشته است. این سفر ۲ ساعت طول کشیده است. هنگام رفت سرعت آب ۲ کیلومتر در ساعت در جهت حرکت قایق و هنگام برگشت سرعت آب ۳ کیلومتر در ساعت بر خلاف جهت حرکت قایق است. عدد ۷ کدام است؟

- ۹ (۱)      ۱۱ (۲)      ۱۳ (۳)      ۱۵ (۴)

۳۵- در یک مستطیل طلایی به طول ۲ و عرض  $x$ ، عدد  $x$  در کدام معادله صدق می‌کند؟

(۱)  $x^2 - x - 1 = 0$       (۲)  $x^2 + x - 1 = 0$

(۳)  $x^2 - 2x - 4 = 0$       (۴)  $x^2 + 2x - 4 = 0$