

کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

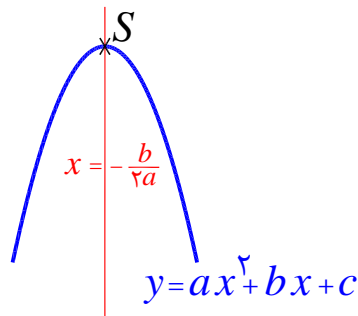
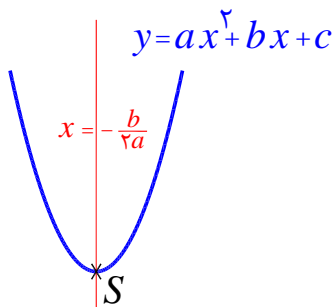
ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل سوم : نمودار توابع درجه دوم

مهر داد عباسپور

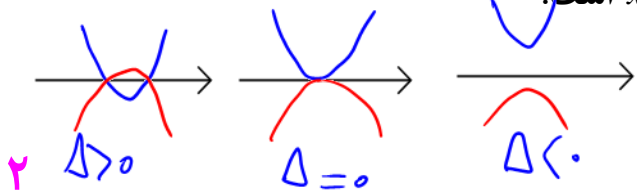
نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ ($\Delta = b^2 - 4ac$)



(۱) در حالت $a > 0$ سهمی رو به بالا و در حالت $a < 0$ سهمی رو به پایین است.

(۲) همواره محور تقارن دارد که معادلهی آن $x = -\frac{b}{2a}$ است.

(۳) مختصات رأس آن $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ است.



۲

۱- اگر نقطه‌ی ماکسیمم تابع درجه دوم $f(x) = (1-m)x^2 + 2mx + m - 4$ روی نیمساز ربع اول

باشد، این تابع محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$$\sqrt{2} - 2 \quad (۴)$$

$$2 + \sqrt{2} \quad (۳) \quad \checkmark$$

$$2 - \sqrt{3} \quad (۲)$$

$$2 + \sqrt{3} \quad (۱)$$

Max $\left\{ \begin{array}{l} |1-m| \quad (0 \rightarrow m) \\ S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{2a}\right) \end{array} \right. \in y = x$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{\Delta}{2a} \rightarrow \Delta = cb$$

$$-\frac{b}{2a} > 0$$

$$\Sigma m^2 - \epsilon(m - \epsilon)(1 - m) = \epsilon m \rightarrow m^2 + (m - \epsilon)(m - 1) = m$$

$$\Gamma m^2 - \gamma m + \epsilon = 0 \rightarrow m^2 - \Gamma m + \Gamma = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} m = 1 \quad \times \\ m = \Gamma \quad \checkmark \end{array} \right.$$

۳ $f(x) = -x^2 + \epsilon x - \Gamma = 0 \rightarrow x^2 - \epsilon x + \Gamma = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$

۲- نمودار تابع $f(x) = (a-2)x^2 + 2ax + (3a-4)$ مماس بر محور x ها و بالای آن قرار دارد. عرض

از مبدأ نمودار این تابع کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲) ✓

۷ (۱)

$$\Delta' = 0$$

$$A > 0$$

$$\begin{cases} a^2 - (a-2)(3a-4) = 0 \\ a-2 > 0 \rightarrow a > 2 \end{cases}$$

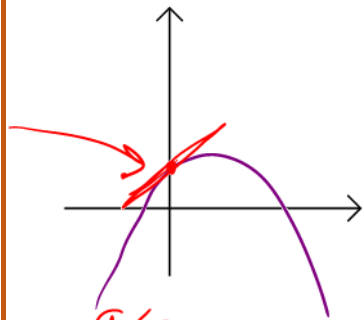
$$-2a^2 + 10a - 8 = 0 \rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \times \\ a = 4 \checkmark \end{cases}$$

$$a = 4 : f(x) = 2x^2 + 8x + 8$$

$$f(0) = 8$$

تعیین علامت a ، b ، c و Δ از روی نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$

(۱) علامت a در بالا / پایین



(۲) علامت b شیب منفی در نقطه تلاقی با محور $f'(0) = b$

(۳) علامت c عرض نقطه تلاقی با محور $c = f(0)$

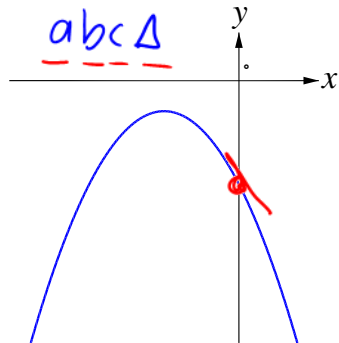
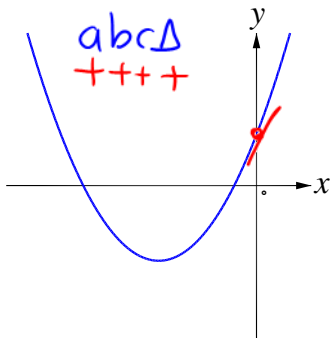
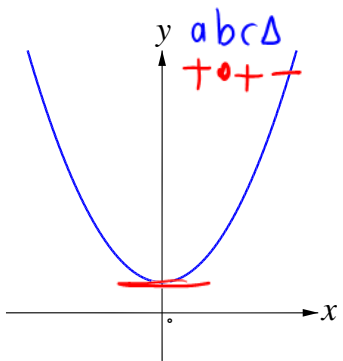
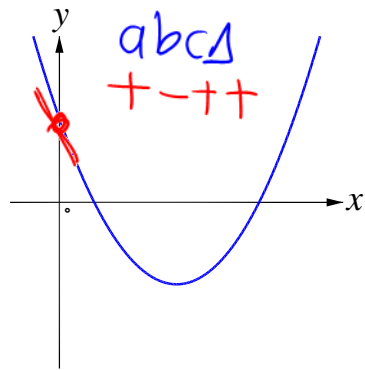
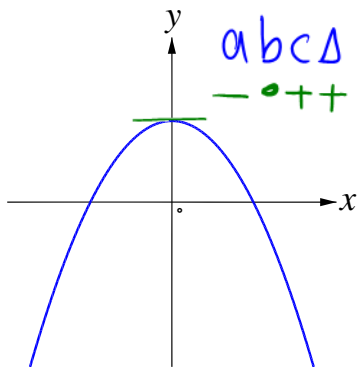
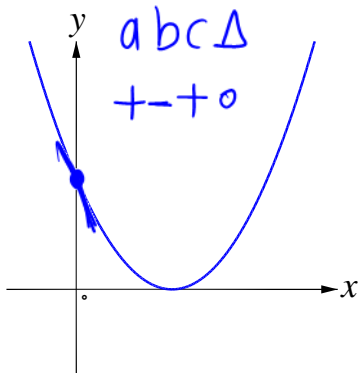
(۴) علامت Δ تعداد ریشه

$$a < 0$$

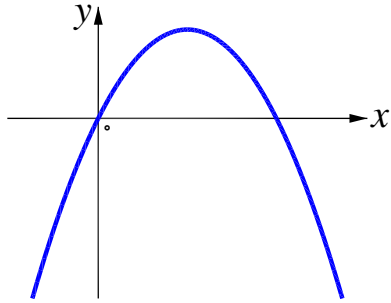
$$c > 0$$

$$b > 0$$

$$\Delta > 0$$



۳- شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = (1-a)x^2 + (b-a)x + (a^2 - 4)$ است، کدام دوتایی (a, b) قابل قبول است؟



$$\left\{ \begin{array}{l} A < 0 \\ B > 0 \\ C = 0 \\ \Delta > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1-a < 0 \Rightarrow a > 1 \\ b-a > 0 \Rightarrow b > a \\ a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b > 2 \end{array} \right.$$

قابل قبول است؟

(۲, ۱) (۱)

(۲, ۳) (۲) ✓

(-۲, -۱) (۳)

(-۲, -۳) (۴)

حواستون باشه $\left(\frac{C}{A} < 0 \rightarrow \Delta > 0 \right)$

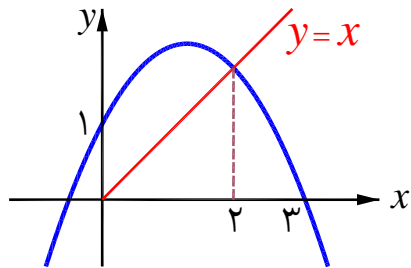
۷

نوشتن معادله‌ی درجه دوم با ویژگی‌های داده شده

(۱) روش کلی

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{13}{9}x + 1$$



$$(0, 1) \rightarrow c = 1$$

$$(3, 0) \rightarrow 9a + 3b + c = 0$$

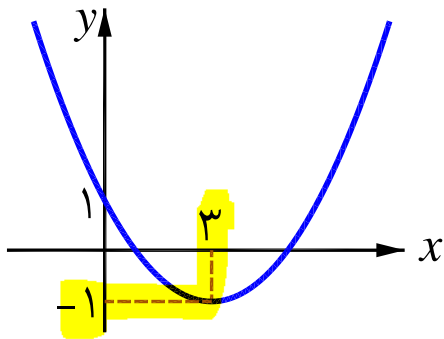
$$(2, 2) \rightarrow 4a + 2b + c = 2$$

$$\begin{cases} 9a + 3b = -1 \\ 4a + 2b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + b = -\frac{1}{3} \\ 2a + b = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{9} \\ b = \frac{13}{9} \end{cases}$$

^

(۲) وقتی رأس معلوم است.



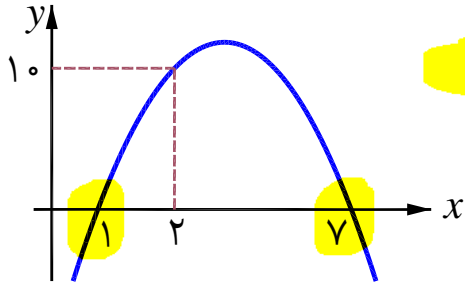
$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

$$y = a(x - 3)^2 - 1$$

$$(0, 1) \rightarrow 1 = 9a - 1 \rightarrow a = \frac{2}{9}$$

$$y = \frac{2}{9} (x - 3)^2 - 1$$

(۳) وقتی ریشه‌ها را داریم.



$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x - 1)(x - v)$$

$$(2, 10) \rightarrow 10 = -5a \rightarrow a = -2$$

$$y = -2(x - 1)(x - v)$$

۴- فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 11)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی،

(سراسری تیربی ۹۹)

از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

(۲, ۱۵) (۴)

(۲, ۹) (۳)

(-۱, ۴) (۲)

(-۱, ۳) (۱)

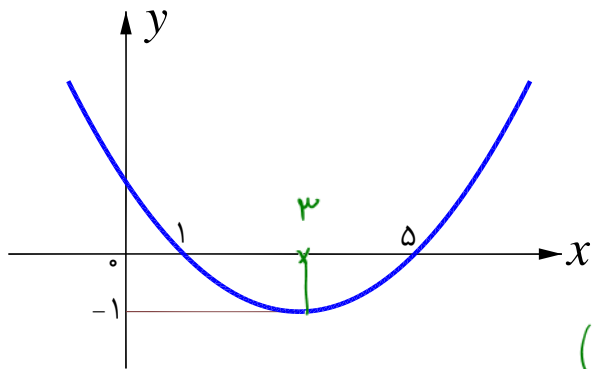
$$(0, 0) \rightarrow c = 0 \quad y = ax^2 + bx + 0$$

$$(-2, 5) \rightarrow 4a - 2b + 0 = 5 \rightarrow b = 2a$$

$$(1, 11) \rightarrow a + b + 0 = 11 \rightarrow a + 2a = 11 \rightarrow a = 11/3$$

$$y = \frac{11}{3}x^2 + 22x + 0$$

۵- شکل روبه‌رو، نمودار یک تابع درجه دوم f است. مقدار $f(0)$ کدام است؟



$$1\frac{1}{4} (2)$$

$$1 (1)$$

$$1\frac{3}{4} (4)$$

$$1\frac{1}{2} (3)$$

$$f(x) = a(x-1)(x-5)$$

$$(3, -1) \rightarrow -1 = a(2)(-2) \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{4} (x-1)(x-5)$$

$$f(0) = \frac{5}{4}$$

۶- رأس یک تابع سهمی نقطه‌ی $(1, 2)$ است و این منحنی، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -6 قطع می‌کند. این منحنی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله‌ی این دو نقطه چقدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$f(x) = a(x-1)^2 + 2$$

$$f(0) = -6 \rightarrow a + 2 = -6 \rightarrow a = -8$$

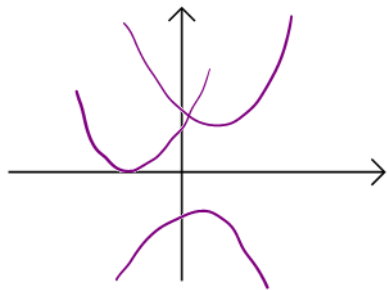
$$f(x) = -8(x-1)^2 + 2 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x-1 = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\Delta} -8x^2 + 14x - 6 \quad \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{48}}{8} = 1$$

۱۳

نمودار تابع درجه دوم در ناحیه‌های مختلف :



(۱) نمودار تابع فقط از دو ناحیه بگذرد.

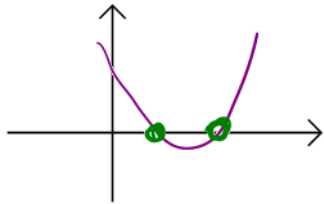
$$\Delta \leq 0$$

(۲) نمودار تابع حداقل از سه ناحیه بگذرد.

متمم : $\Delta > 0$

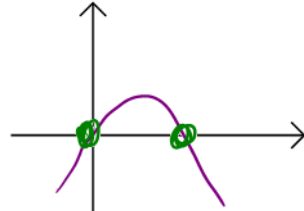
$$\Delta > 0$$

(۳) نمودار تابع دقیقاً از سه ناحیه بگذرد.



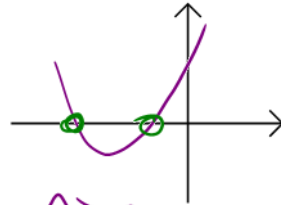
$$\Delta > 0$$

$$P > 0$$



$$\Delta > 0$$

$$P = 0$$

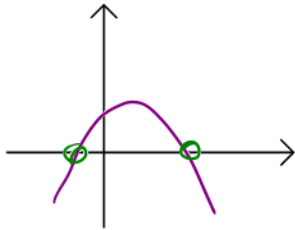


$$\Delta > 0$$

$$P > 0$$

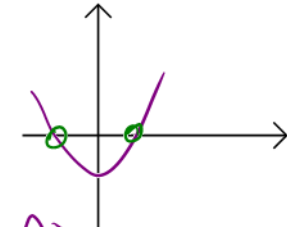
$$\Delta > 0 \text{ و } P \geq 0$$

(۴) نمودار تابع از هر چهار ناحیه بگذرد.



$$\Delta > 0$$

$$P < 0$$



$$\Delta > 0$$

$$P < 0$$

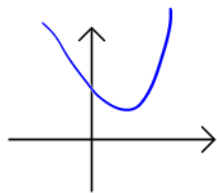
$$P < 0$$

$$P < 0 \rightarrow \Delta > 0$$

حسرتانم

$$\Delta < 0 \rightarrow \text{سه ریشه} \checkmark$$

$$\Delta > 0, P \geq 0 \rightarrow \text{سه ریشه} \checkmark$$



(۵) نمودار تابع حداکثر از سه ناحیه بگذرد.

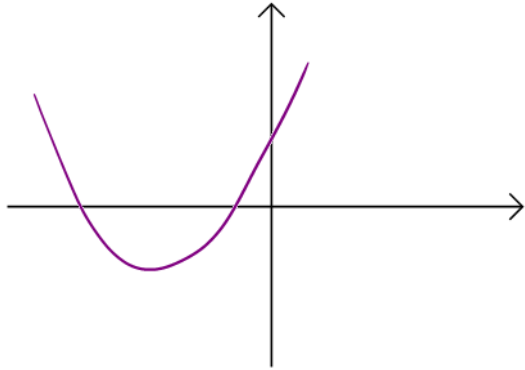
مستقیم: $P \geq 0$

$$P \geq 0$$

(۶) نمودار تابع فقط از دو ناحیه ۱ و ۲ بگذرد.

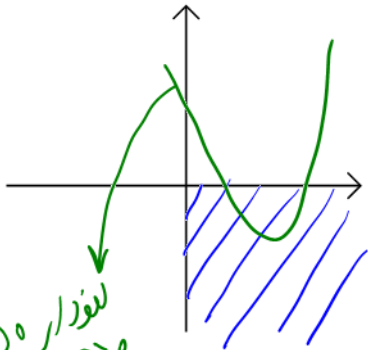
$$\Delta \leq 0, A > 0$$

(۷) نمودار تابع فقط از ناحیه‌های ۱، ۲ و ۳ بگذرد.



$$A > 0, B > 0, C > 0, \Delta > 0$$

(۸) نمودار تابع از ناحیه‌ی ۴ نگذرد.



نمودار از $A > 0$ / $C \geq 0$ عبور نکند

$$\begin{array}{|l} A > 0 \\ C \geq 0 \end{array} \quad - \quad \begin{array}{|l} B < 0 \\ \Delta > 0 \end{array}$$

اگر $y = ax^2 - 2(a+1)x + a - 1$ از ناحیه‌ی دوم دستگاه مختصات عبور نکند، حدود a را بیابید.

$$\begin{cases} A < 0 \\ C \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

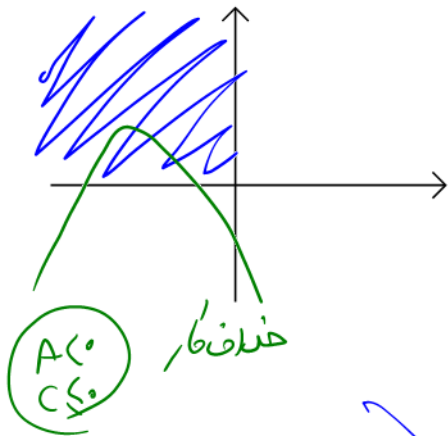
$$-2a - 2 < 0 \rightarrow \underline{a > -1}$$

$$(a+1)^2 - a(a-1) > 0$$

$$3a + 1 > 0 \rightarrow \underline{a > -\frac{1}{3}}$$

$$\cap \rightarrow \underline{a > -\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} a < 0 \\ a - 1 \leq 0 \end{aligned} \rightarrow a < 0$$



$$a < 0 \text{ و } \cancel{a > -\frac{1}{3}} \rightarrow a < 0 \text{ و } a \leq -\frac{1}{3} \rightarrow \underline{a \leq -\frac{1}{3}}$$

۷- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی به معادله $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ همواره

(سراسری ریاضی فارج ۹۱)

پایین محور x ها است؟

$$2 < m < 6 \quad (۴)$$

$$2 < m < 4 \quad (۳)$$

$$2 < m < 5 \quad (۲) \quad \checkmark$$

$$1 < m < 5 \quad (۱)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A < 0 \\ \Delta' < 0 \end{array} \right.$$

$$1 - m < 0 \rightarrow m > 1$$

$$(m-3)^2 + 1 - m < 0 \rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \rightarrow 2 < m < 5$$

$$\xrightarrow{\cap} 2 < m < 5$$

۸- نمودار تابع $f(x) = (m-1)x^2 - (2m+1)x + m+1$ دقیقاً از سه ناحیهی دستگاه مختصات می-

گذرد. اگر m منفی باشد، محدودهی تغییرات m کدام است؟

$m < -\frac{5}{4}$ (۱) $-\frac{5}{4} < m \leq -1$ (۲) ✓ $m \leq -1$ (۳) $-1 \leq m < 0$ یا $m < -\frac{5}{4}$ (۴)

$$\Delta > 0 \rightarrow (2m+1)^2 - 4(m+1)(m-1) > 0 \rightarrow 4m+5 > 0 \rightarrow m > -\frac{5}{4}$$

$$P \geq 0 \rightarrow \frac{m+1}{m-1} \geq 0 \rightarrow m \leq -1 \text{ یا } m > 1$$

$$\cup \rightarrow -\frac{5}{4} < m \leq -1$$

۹- نمودار تابع درجه دوم $f(x) = (2-a)x + 2ax + (a+4)$ حداکثر از سه تا از ناحیه‌های دستگاه مختصات می‌گذرد. برای a چند مقدار صحیح وجود دارد؟

۴ بی‌شمار

۵ (۳)

۶ (۲) ✓

۷ (۱)

$$P \geq 0 \rightarrow \frac{a+4}{2-a} \geq 0 \rightarrow -4 \leq a < 2$$

$$a = -4, -3, -2, -1, 0, 1$$

آزمون

۱۰- اگر محور تقارن منحنی تابع $f(x) = ax^2 + 8x + b$ ، خط $x = -1$ باشد و رأس آن روی خط $y = 5x + a$ قرار بگیرد، طول یکی از نقاط تلاقی آن با محور x کدام است ؟

$$\frac{1}{2} \text{ (۴)} \quad -\frac{1}{2} \text{ (۳)} \checkmark \quad -1 \text{ (۲)} \quad 1 \text{ (۱)}$$

$$x = -\frac{8}{2a} = -1 \Rightarrow a = 4$$

$$y = 5x + 4 \xrightarrow{x = -1} S(-1, -1)$$

$$\begin{matrix} \text{عوض} \\ \curvearrowright \end{matrix} -1 = a - 8 + b \rightarrow -1 = 4 - 8 + b \Rightarrow b = 3$$

$$f(x) = 4x^2 + 8x + 3 = (2x+1)(2x+3) \rightarrow x = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$$

۱۱- نمودار تابع درجه دوم $f(x) = mx^2 + 4x + m - 4$ محورهای مختصات را در سه نقطه قطع می-

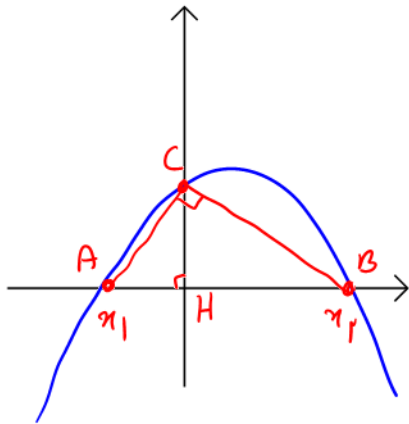
کند. به ازای کدام مقدار m ، مثلثی که رئوس آن این سه نقطه است، قائم‌الزاویه است؟

$2 + \sqrt{3}$ (۴) ✓

$1 + \sqrt{3}$ (۳)

$2 + \sqrt{2}$ (۲)

$1 + \sqrt{2}$ (۱)



$$CH^2 = HA \cdot HB$$

$$(f(0))^2 = -x_1 x_2 \Rightarrow (m-4)^2 = -\frac{m-4}{m}$$

$$m(m-4)^2 = -(m-4) \quad m-4 \neq 0$$

$$m^2 - 4m = -1 \rightarrow m^2 - 4m + 1 = 0$$

$$m = 2 \pm \sqrt{3}$$

۱۲- شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = (m^2 - 4)x^2 + (m - 3)x - (m + 1)$ است، اگر $m \in (a, b)$ باشد،

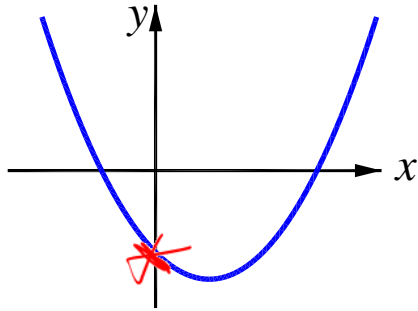
بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱) ✓

۴ (۴)

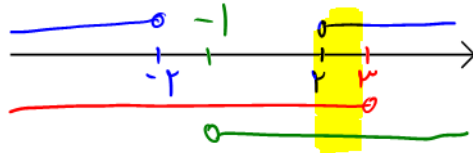
۳ (۳)



$$\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

مردانیم و ص $q < 0$ است $\Delta > 0$ می‌گور

$$\begin{cases} m^2 - 4 > 0 \rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 2 \\ m - 3 < 0 \rightarrow m < 3 \\ -(m + 1) < 0 \rightarrow m > -1 \end{cases}$$



$$m \in (2, 3)$$

۱۳- نمودار یک تابع درجه دوم محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۶ قطع می‌کند و عرض رأس آن

برابر ۸ است. اگر یکی از نقاط تقاطع این تابع با محور x ، -۱ باشد، نقطه‌ی تقاطع دیگر با طول

$$y = ax^2 + bx + c$$

بزرگتر کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳) ✓

۲ (۲)

۱ (۱)

$$(0, 4) \Rightarrow 4 = c$$

$$(-1, 0) \Rightarrow 0 = a - b + c \Rightarrow b = a + 4$$

$$y = ax^2 + (a+4)x + 4$$

$$y_D = 1 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 1 \Rightarrow \Delta = -4a \Rightarrow b^2 - 4ac = -4a \Rightarrow$$

$$b^2 + 4a = 0 \xrightarrow{b = a + 4} (a+4)^2 + 4a = 0 \Rightarrow a^2 + 16a + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ a = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -4x^2 + 12x + 4 = (x+1)(-4x+4) = 0 \Rightarrow x = 3 \\ y = -12x^2 - 12x + 4 = (x+1)(-12x+4) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

۱۴- نمودار یک تابع درجه دوم محورهای مختصات را در نقاطی به طول‌های ۴- و ۲ و عرض ۲۴

قطع می‌کند. بیشترین مقدار این تابع چقدر است؟

۲۸ (۴)

۲۷ (۳) ✓

۲۶ (۲)

۲۵ (۱)

$$y = a(x-2)(x+4)$$

$$(0, 24) \Rightarrow 24 = a(-2)(4) \rightarrow a = -3$$

$$y = -3(x-2)(x+4)$$



$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2-4}{2} = -1$$

$$x_s = -1 \rightarrow y_s = -3(-3)(3) = 27$$

۱۵- فرض کنید رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را $A(-1, 9)$ می گذرد؟ این سهمی از

(سراسری تیرین فارغ ۹۹)

کدام یک از نقاط زیر، می گذرد؟

(۴) (۱, ۵)

(۳) (۲, ۵)

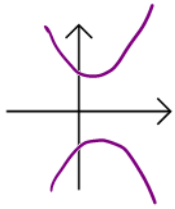
(۲) (۵, -۹) ✓

(۱) (۵, -۷)

$$y = a(x+1)^2 + 9 \xrightarrow{(3,1)} 1 = a(1+1)^2 + 9 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 9 \quad x=8 \rightarrow y = -9$$

۱۶- نمودار تابع $y = x^2 + 2(a+2)x + a^3 + 8$ فقط از دو تا از ناحیه‌های مختصات عبور می‌کند.



$-2 < a < 1$ یا $2 < a$ (۲) ✓

$-2 < a < -1$ یا $2 < a$ (۴)

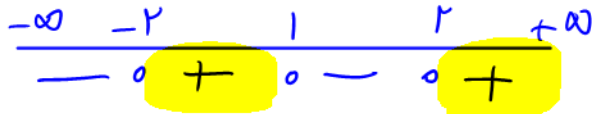
محدوده‌ی تغییرات a کدام است؟

$a < -2$ یا $1 < a < 2$ (۱)

$a < -2$ یا $-1 < a < 2$ (۳)

$$\Delta' \leq 0 \Rightarrow (a+2)^2 - (a^3+8) \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a + 4 - a^3 - 8 \leq 0$$

$$a^3 - a^2 - 4a + 4 \geq 0 \rightarrow a^2(a-1) - 4(a-1) \geq 0 \rightarrow (a-1)(a^2-4) \geq 0$$



$$-2 \leq a \leq 1 \cup 2 \leq a$$

۱۷- نمودار تابع درجه دوم $f(x) = (m-2)x^2 - 2mx + (m+4)$ از هر چهار ناحیه‌ی دستگاه

مختصات عبور می‌کند. مجموعه‌ی مقادیر ممکن برای m کدام است؟

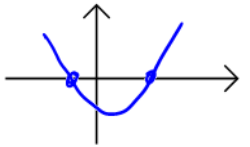
$m > 4$ (۴)

$2 < m < 4$ (۳)

$-4 < m < 2$ (۲) ✓

$m < -4$ (۱)

$P < 0$

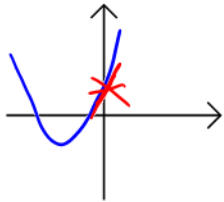


\Rightarrow

$\frac{m+4}{m-2} < 0 \Rightarrow -4 < m < 2$

۱۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a+1)x^2 + 2(a-1)x + 1$ فقط از ناحیه‌ی

اول، دوم و سوم محورهای مختصات می‌گذرد؟



$$a > 3 \text{ (۴) ✓}$$

$$-1 < a < 3 \text{ (۳)}$$

$$1 < a < 3 \text{ (۲)}$$

$$a < 1 \text{ (۱)}$$

$$\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \\ C > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+1 > 0 \Rightarrow a > -1 \\ 2(a-1) > 0 \Rightarrow a > 1 \\ 1 > 0 \checkmark \end{cases} \xrightarrow{\cap} \underline{a > 1}$$

$$(a-1)^2 - (a+1) > 0 \rightarrow a^2 - 3a > 0 \Rightarrow \underline{a < 0 \text{ or } a > 3}$$

$$\xrightarrow{\cap} a > 3$$

۱۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه‌ی اول

محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

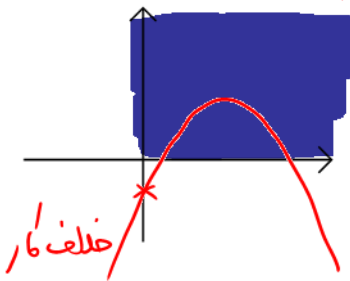
(سراسری ۹۲)

$a \leq 2$ (۱) ✓

$0 < a \leq 2$ (۲)

$2 < a < 3$ (۳)

$0 < a < 3$ (۴)



$A < 0$
 $C \leq 0$

$B > 0$
 $\Delta > 0$

$\begin{cases} a-3 < 0 \Rightarrow a < 3 \\ -1 \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a > 0 \\ a^2 + 4(a-3) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \end{cases}$

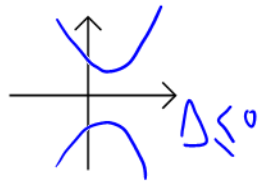
$(a-2)(a+6) > 0 \Rightarrow a < -6 \vee a > 2$

$\cap \rightarrow a > 2$

$a < 3 \cap \cancel{(a > 2)} \rightarrow a < 3 \cap a \leq 2 \rightarrow a \leq 2$

۲۰- برای چند عدد صحیح a ، نمودار تابع سهمی $y = (a-2)x^2 + 4x + a$ ، حداقل از سه تا از

ناحیه‌ی دستگاه مختصات، می‌گذرد؟



۴ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱) ✓

$$\rightarrow \Delta' > 0 \rightarrow \Sigma -a(a-2) > 0 \rightarrow a^2 - 2a - 4 < 0 \rightarrow$$

$$\underbrace{1-\sqrt{5}}_{-1,2} < a < \underbrace{1+\sqrt{5}}_{3,2} \rightarrow a = -1, 0, 1, 2, 3$$