

کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل پنجم : قدر مطلق و جزء صحیح

مهر داد عباسپور

تعریف و ویژگی‌های قدرمطلق

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$|x| \geq 0$$

$$|x| = |-x|$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|xy| = |x||y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

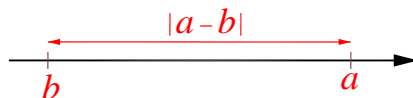
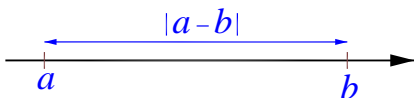
$$|x^n| = |x|^n$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$$

$$|a+b| < |a| + |b| \Leftrightarrow ab < 0$$

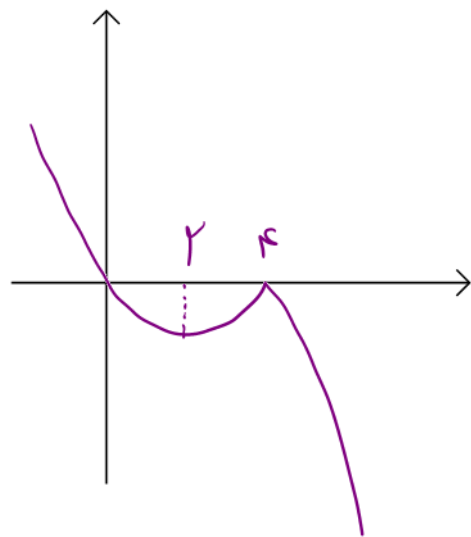
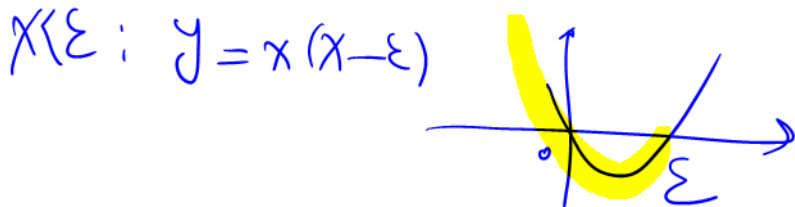
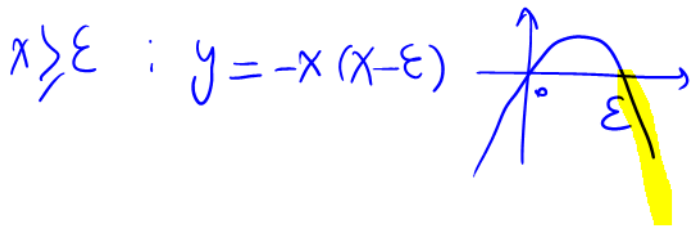
تذکر: فاصله‌ی دو نقطه‌ی a و b روی محور اعداد برابر $|a-b|$ است.



رسم نمودارهای مطلق

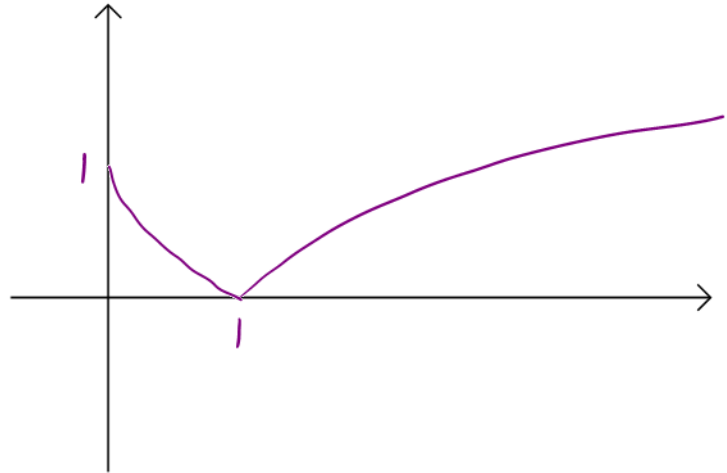
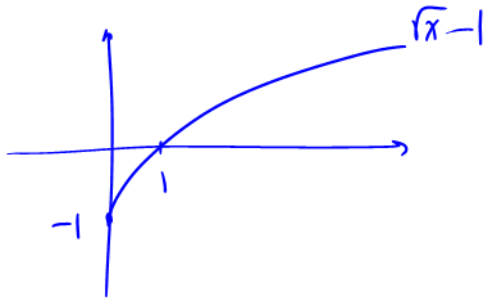
بازه بندی

$$y = -x|x-4|$$



رسم نمودار $y = |f(x)|$ از روی $y = f(x)$

$$y = |\sqrt{x} - 1|$$

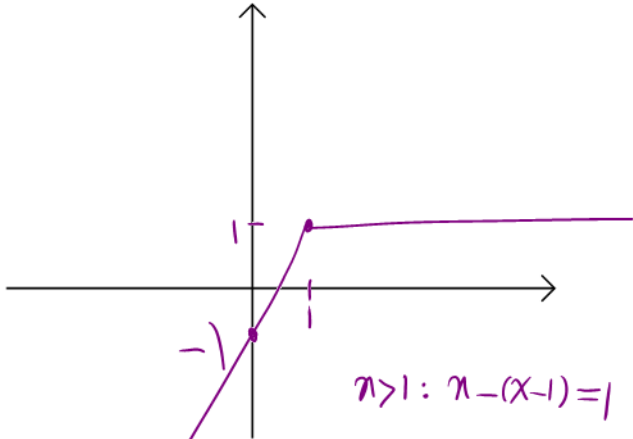


توابع خطی قدر مطلق

$x = -1/y = 2 \leftarrow \rightarrow x = 0/y = 2$

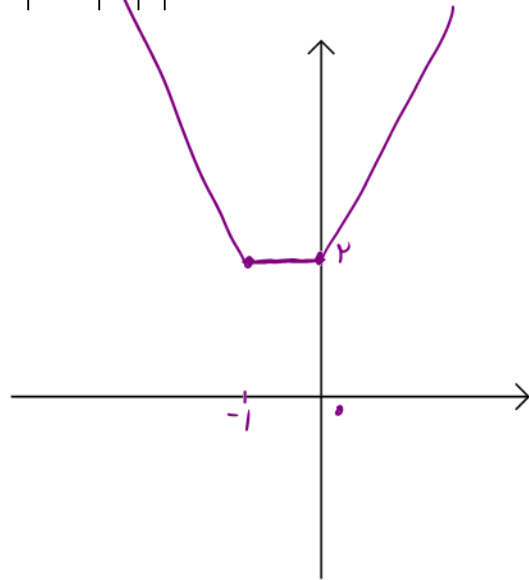
$y = x - |x - 1|$

$y = |x + 1| + |x| + 1$



$x > 1: x - (x - 1) = 1$

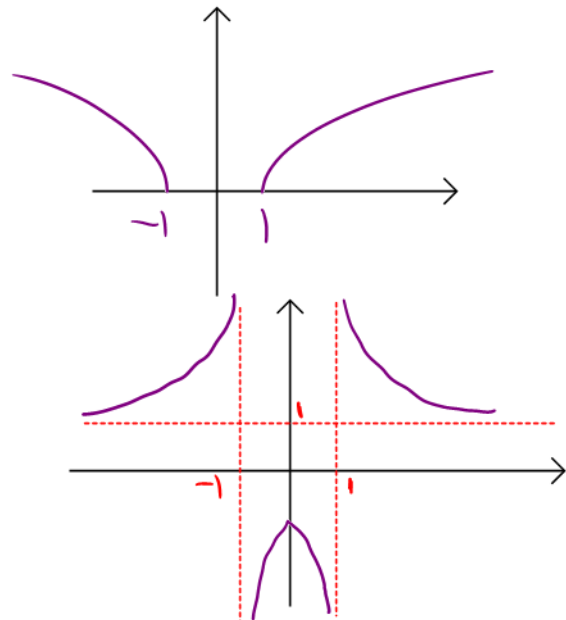
$x < 1: x = 0$
 $y = -1$



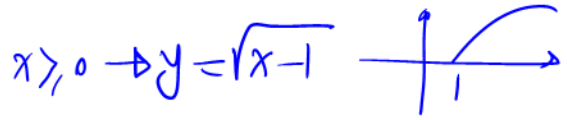
5

رسم نمودار $y = f(|x|)$ از روی $y = f(x)$

محور تقارن: محور y ها



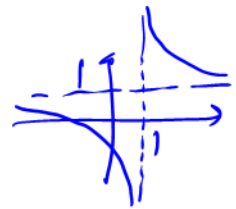
$$y = \sqrt{|x|-1}$$



$x < 0$
 $y = \frac{1+|x|}{|x|-1}$

$$y = \frac{1+|x|}{|x|-1}$$

$x < 0 : y = \frac{x+1}{1-x}$



۶

حل معادلات و نامعادلات $|A| < |B|$ ، $|A| > B$ ، $|A| < B$ ، $|A| = B$ ، $|A| = |B|$

$$|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$$

$$|A| = B \Leftrightarrow A = \pm B, B \geq 0$$

$$|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$$

$$|x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$$

$$|A| > B \Leftrightarrow A < -B \text{ و } A > B$$

$$|x| > 2 \Rightarrow x < -2 \text{ و } x > 2$$

$$|A| < |B| \Leftrightarrow A^2 < B^2 \Leftrightarrow A^2 - B^2 < 0 \Leftrightarrow \text{منوع}$$

توان $\sqrt{\quad}$ / $\sqrt{\quad}$ / منوع

$$|x^2 - 2| = |x|$$

$$x^2 - 2 = \pm x \rightarrow \begin{cases} x = -1, 2 \\ x = 1, -2 \end{cases}$$

$$|x - 1| = 2x + 7$$

$$x - 1 = \pm (2x + 7) \quad 2x + 7 \geq 0$$

$$\begin{cases} x = -1 & X \\ x = -2 & \checkmark \end{cases}$$

^

$$|2x-1| > v \rightarrow 2x-1 < -v \quad \underline{\vee} \quad (x-1) > v$$

$$\rightarrow \underline{\vee(x-1) < -v \quad \vee(x-1) > v}$$

$$|2x-1| < 2x+5 \rightarrow -2x-8 < 2x-1 < 2x+5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x-8 < 2x-1 \rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < x \\ 2x-1 < 2x+5 \rightarrow -4 < x \end{array} \right. \xrightarrow{\cap} \underline{x > -\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$|3x+1| > |2x-3| \rightarrow (3x+1)^2 > (2x-3)^2 \rightarrow (3x+1)^2 - (2x-3)^2 > 0$$

$$(3x+1+2x-3)(3x+1-2x+3) > 0$$

$$(5x-2)(x+4) > 0 \rightarrow \underline{x < -4 \vee x > \frac{2}{5}}$$

$$\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| > 3 \xrightarrow[\substack{x \neq -2 \\ \text{and } x \neq 0}]{\text{}} |2x-1| > |3x+6| \rightarrow (2x-1)^2 > (3x+6)^2$$

$$(2x-1)^2 - (3x+6)^2 > 0 \rightarrow (2x-1-3x-6)(2x-1+3x+6) > 0 \rightarrow$$

$$-1(x-7) \xrightarrow{x \neq -2} x \in (-1, 7) - \{-2\}$$

10

تبدیل نامعادلات $a < x < b$ و $(x < a$ یا $x > b)$ به نامعادلات قدرمطلق

$$3 < x < 7 \xrightarrow{-5} -2 < x-5 < 2 \rightarrow |x-5| < 2$$

$$\frac{3+7}{2} = 5$$

$$x < -6 \text{ یا } x > 2 \xrightarrow{-(-2)} x+2 < -4 \text{ یا } x+2 > 4 \Rightarrow |x+2| > 4$$

$$\frac{-6+2}{2} = -2$$

$$-1 < \frac{x}{x+1} < 1$$

$$\frac{-1+r}{r} = 1$$


$$\xrightarrow{-1}$$

$$-1 < \underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\frac{-1}{x+1}} < 1$$

$$\left| \frac{-1}{x+1} \right| < 1 \rightarrow \frac{1}{|x+1|} < 1 \xrightarrow{x \neq -1} 1 < |x+1|$$

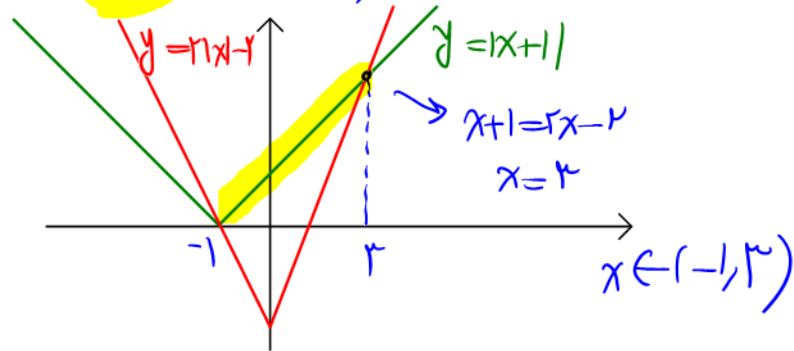
$$|x+1| < -1 \quad \underline{\quad} \quad |x+1| > 1$$

$$\left(\frac{1}{r} < -\frac{r}{r} \quad \underline{\quad} \quad x > -\frac{1}{r} \right)$$

$$|x+1| - 2|x| > -2$$


- $x < -1$: $-x-1+2x > -2$: $x > -1 \rightarrow \emptyset$
 - $-1 < x < 0$: $x+1+2x > -2$: $x > -1 \rightarrow (-1, 0]$
 - $x > 0$: $x+1-2x > -2$: $x < 3 \rightarrow (0, 3)$
- حواب : $(-1, 3)$ \cup

رسم / $|x+1| > 2|x| - 2$



تعریف و ویژگی‌های جزء صحیح

$$[x]=n \Leftrightarrow n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x+k]=[x]+k$$

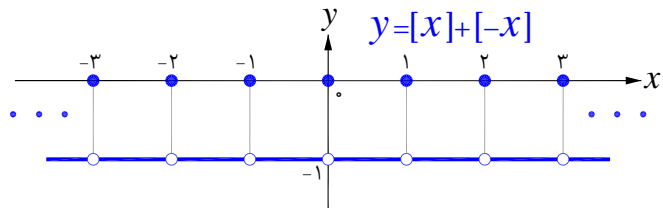
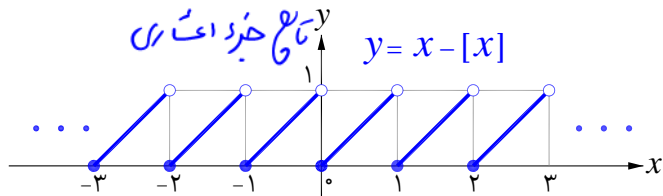
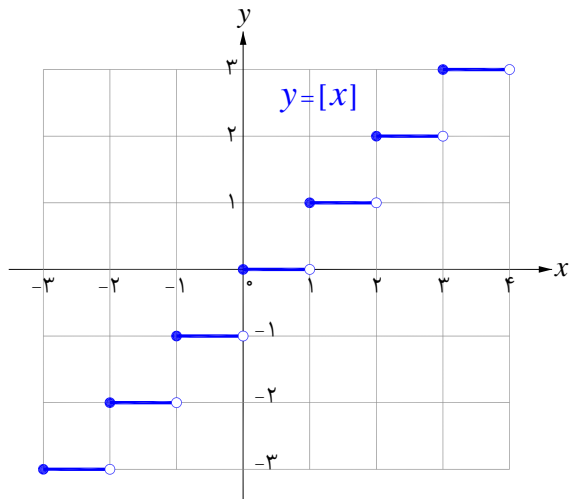
$$0 \leq x - [x] < 1$$

$$[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$[x]=r \rightarrow r \leq x < r+1$$

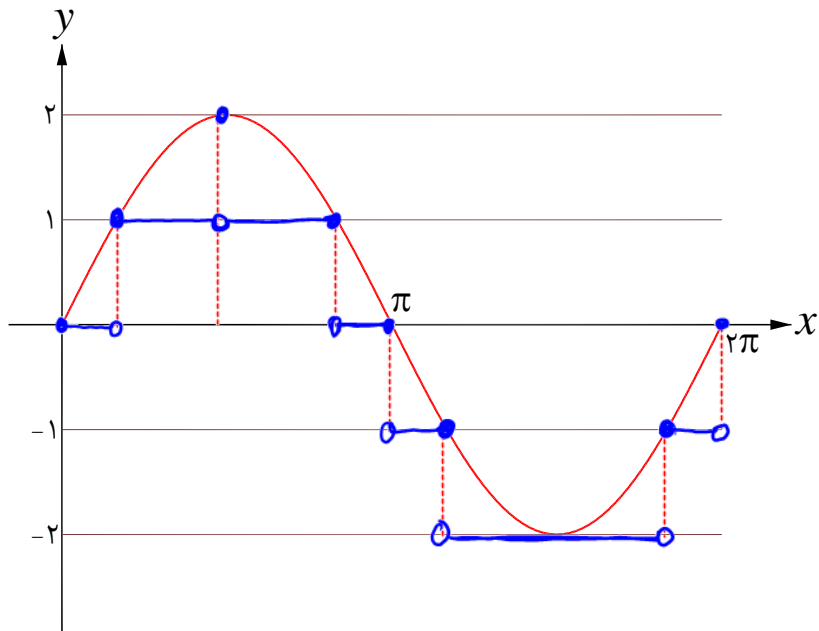
$$[x-v]=[x]-v$$

نمودارهای مربوط به جزء صحیح



رسم نمودار $y = [f(x)]$ از روی $y = f(x)$

$$y = [\sqrt{\sin x}]$$



۱- ساده شده‌ی تابع $f(x) = \sqrt{x+1-2\sqrt{x}} - |x-\sqrt{x}|$ وقتی $x \in (0,1)$ باشد، کدام است؟

$$-(\sqrt{x}-1)^2 \quad (۴)$$

$$(\sqrt{x}-1)^2 \quad (۳)$$

$$1-x \quad (۲)$$

$$x-1 \quad (۱)$$

$$(\sqrt{x}-1)^2$$

$$f(x) = \underbrace{|\sqrt{x}-1|}_{\ominus} - \underbrace{|x-\sqrt{x}|}_{\ominus}$$



$$= -\sqrt{x} + 1 + x - \sqrt{x}$$

$$= x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x}-1)^2$$

۲- مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x|$ و $y = 5 - |x - 1|$ کدام است؟

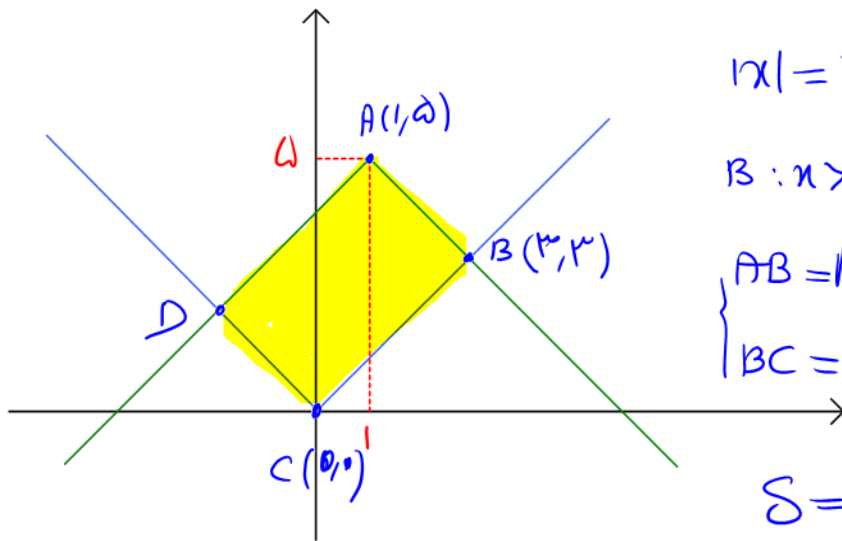
(سراسری ریاضی ۹۷)

۹ (۲)

۸ (۱)

۱۲ (۴) ✓

۱۰ (۳)



$$|x| = 2 - (x - 1)$$

$$B : x > 1 \rightarrow x = 2 - x + 1 \rightarrow x = 3$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$S = (2\sqrt{2})(3\sqrt{2}) = 12$$

۳- مجموعه جواب معادله $|x| + |x-1| = |2x-1|$ کدام است؟

(۱) $\{0, 1\}$

(۲) $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$

(۳) $[0, 1]$

هیچ کدام (۴)

$$\underbrace{|x|}_a + \underbrace{|x-1|}_b = \underbrace{|2x-1|}_{a+b}$$

$$|a| + |b| = |a+b|$$

$$\Leftrightarrow ab \geq 0$$

$$(x)(x-1) \geq 0$$


$$x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

۴- مجموع مربعات ریشه‌های معادله $|x^2 - 3| = |2x + 1|$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۶ (۳)

۱۸ (۲)

۲۰ (۱) ✓

$$x^2 - 3 = \pm(2x + 1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 4 = 0 & \Delta' = 5 > 0 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 & \Delta' = 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 4 = 0 & \Delta' = 5 > 0 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 & \Delta' = 3 > 0 \end{cases}$$

ریشه‌ها

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 2^2 - 2(-4) = 12$$

$$x_3^2 + x_4^2 = S^2 - 2P = 2^2 - 2(-2) = 8$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 20$$

۵- مجموع طول نقاط نقاط نمودار توابع $f(x) = (x+1)|1-x|$ و $g(x) = x^2 + 2x - 11$ برابر کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۵ (۱)

$$x^2 + 2x - 11 = (x+1) |1-x|$$

$x \geq 1$: $x^2 + 2x - 11 = (x+1)(x-1) \rightarrow \cancel{x^2 + 2x - 11} = \cancel{x^2 - 1} \rightarrow x = 5$ ✓

$x < 1$: $x^2 + 2x - 11 = (x+1)(1-x) \rightarrow x^2 + 2x - 11 = 1 - x^2$

$2x^2 + 2x - 12 = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \cancel{4} \text{ و } -3$ ✓

$$x \in \{-3, 5\}$$

۶- مجموع ریشه‌های معادله $\sqrt{2x+5} = |x-1| + x$ کدام است؟

✓ (۴) صفر

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) $-\frac{5}{2}$

$x \geq 1$

$\sqrt{2x+5} = x-1+x \xrightarrow{2x-1 \geq 0} 2x+5 = 2x^2 - 2x + 1$

$2x^2 - 4x - 4 = 0 \rightarrow 2x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow (x-2)(2x+1) = 0$

$x = 2$ ✓ ~~$x = -\frac{1}{2}$~~

$x < 1$

$\sqrt{2x+5} = 1-x+x \rightarrow 2x+5 = 1$

$x = -2$ ✓

$x \in \{2, -2\}$



$$y = x + |x-1|$$

$$y = |x-1|$$

$$y = \sqrt{|x+2|}$$

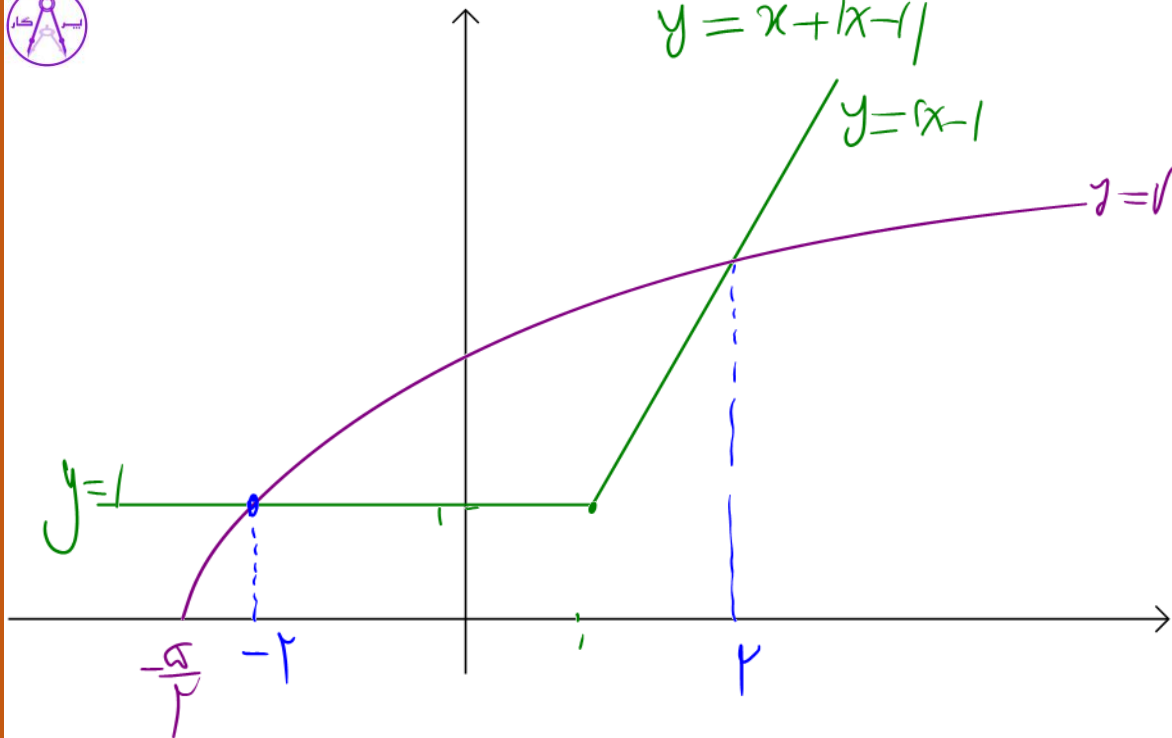
$$y = 1$$

$$-\frac{3}{2}$$

$$-1$$

$$1$$

$$2$$



۷- مجموعه جواب نامعادله‌های $|2x-5| < x+11$ و $|x-a| < b$ یکسان است. مقدار b کدام است؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)



$$-x-11 < 2x-5 < x+11 \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x-5 < x+11 \rightarrow x < 16 \\ -x-11 < 2x-5 \rightarrow -3x < 6 \rightarrow x > -2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} \wedge \\ \rightarrow -2 < x < 16 \end{array} \xrightarrow[\begin{array}{c} -v \\ -v \end{array}]{\begin{array}{c} -2+14=v \\ 2 \end{array}} -9 < x-v < 9$$

$$\rightarrow |x-v| < 9 \quad b=9$$

(سراسری تیرہی ۹۹)

۸- مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3$ ، کدام است؟

(۴) (۰/۸, ۲)

(۳) (۱, ۲)

(۲) (۰/۸, ۱/۲) ✓

(۱) (۰/۶, ۱/۵)

دو طرف
باز

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2x-1} > 1 \\ \frac{x+1}{2x-1} < 3 \end{cases}$$

از طرف اول

تقریب / $\frac{x+1}{2} = 2 \xrightarrow{-2} -1 < \frac{x+1}{2x-1} - 2 < +1 \rightarrow$

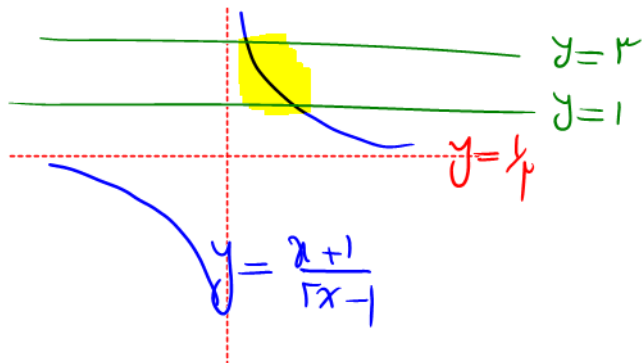
$$\left| \frac{x+1}{2x-1} - 2 \right| < 1 \rightarrow \left| \frac{x-3x}{2x-1} \right| < 1 \rightarrow |x-3x| < |2x-1| \quad x \neq \frac{1}{2}$$

۲۴ $(x-3x)^2 - (2x-1)^2 < 0 \Rightarrow (-x+2)(-5x+1) < 0 \rightarrow \frac{2}{5} < x < 2$



$$1 < \frac{x+1}{x-1} < 3$$

سؤال 3



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = 1 \rightarrow x = 2 \\ \frac{x+1}{x-1} = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$\left(\frac{3}{2}, 1 \right)$

۹- نمودار تابع $y = x^2 + 3$ برای x در بازه (a, b) زیر نمودار تابع $y = |2x - 5|$ قرار دارد. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲) ✓

$2\sqrt{2}$ (۱)

$$x^2 + 3 < |2x - 5|$$

$$|A| > B \quad A < -B \leq A > B$$

$$\begin{cases} 2x - 5 > x^2 + 3 \\ \textcircled{L} \\ 2x - 5 < -x^2 - 3 \end{cases}$$

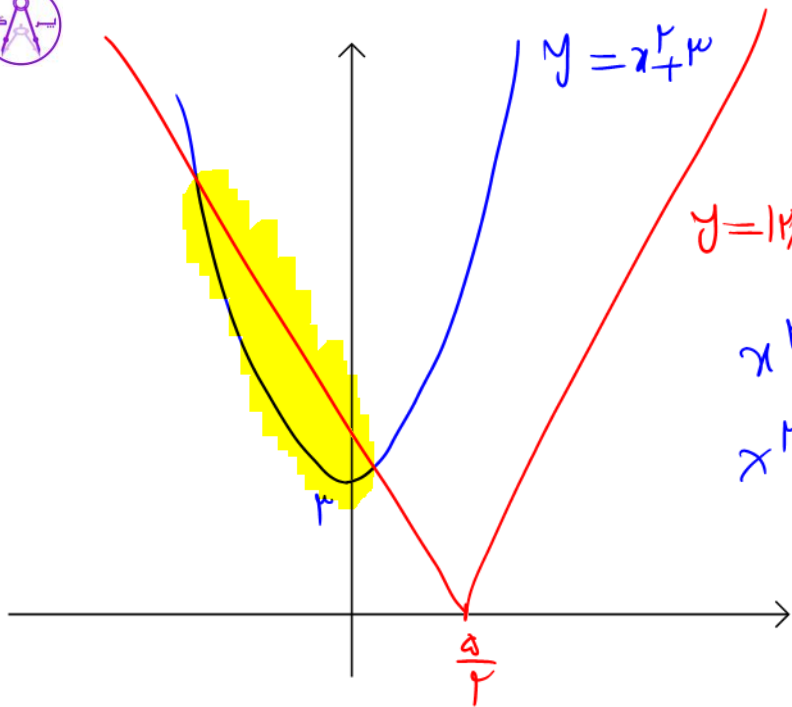
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 < 0 & \Delta < 0 \quad X \rightarrow \emptyset \\ \textcircled{U} \\ x^2 + 2x - 2 < 0 \Rightarrow -1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$(a, b) = (-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}) \quad \therefore b - a = 2\sqrt{3}$$

$$b - a = \frac{\sqrt{\Delta}}{|x^2 \text{ ضریب}|} = \frac{\sqrt{12}}{1}$$



عنوان



$$y = x^2 + r$$

$$y = |x - d|$$

$$x^2 + r = -x + d$$

$$x^2 + x - r + d = 0$$

$$\frac{\sqrt{1 + 4(r - d)}}{2} = r$$

۱۰- عدد طبیعی n در معادله $|n-24| = \left[\sqrt{n^2 + 6n + 5} \right]$ صدق می کند. مجموع ارقام n کدام

است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

$$(n+2)^2 < n^2 + 6n + 5 < (n+3)^2$$

$$n+2 < \sqrt{n^2 + 6n + 5} < n+3 \Rightarrow \left[\sqrt{n^2 + 6n + 5} \right] = n+2$$

$$(n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$$

$$(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$$

$$|n-24| = n+2 \quad \begin{cases} n-24 = n+2 & \times \\ n-24 = -(n+2) & \end{cases} \quad \frac{n+2 > 0}{}$$

$$n = 11$$



۱۵۸
طوسی
تقریب

$$\left[\sqrt{\varepsilon n^2 - 12n + 1} \right]$$

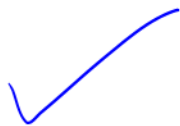
$$(2n - 3)^2 = \varepsilon n^2 - 12n + 9 \quad \text{جواب}$$

$$(2n - \varepsilon)^2 = \varepsilon n^2 - 12n + 12$$

$$\varepsilon n^2 - 12n + 12 < \varepsilon n^2 - 12n + 1 < (2n - 3)^2$$

?

تقریب



$$12 < \varepsilon n$$

$$n > 12, 18$$

$$2n - \varepsilon < \sqrt{\varepsilon n^2 - 12n + 1} < 2n - 3$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{\varepsilon n^2 - 12n + 1} \right] = 2n - \varepsilon$$

۱۱- اگر $\left[\frac{1-x}{3}\right] + 1 = 0$ باشد، برد تابع $y = [2x + \sqrt{x}]$ چند عضو دارد؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

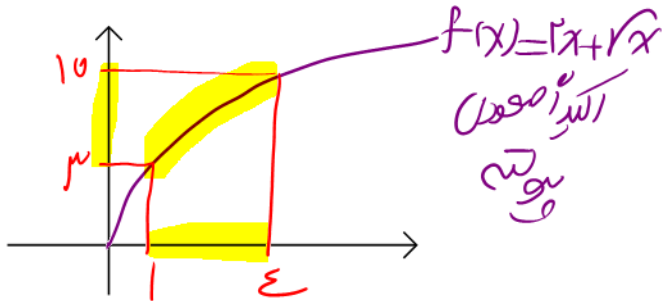
۶ (۱)

$$\left[\frac{1-x}{3}\right] = -1 \rightarrow -1 \leq \frac{1-x}{3} < 0 \rightarrow -3 \leq 1-x < 0$$

$$-3 \leq -x < -1 \rightarrow 1 < x \leq 3$$

$$\rightarrow \{2x + \sqrt{x} \leq 10\}$$

$$\rightarrow [2x + \sqrt{x}] = 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10$$



۱۲- برد تابع $f(x) = x - \left[\frac{3x+2}{3} \right]$ بازه‌ی $[a, b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۳)}$$

$$-\frac{1}{3} \text{ (۲) ✓}$$

$$-\frac{2}{3} \text{ (۱)}$$

$$f(x) = x - \left[\frac{3x}{3} + \frac{2}{3} \right] = x - \left[x + \frac{2}{3} \right]$$

$$= x + \frac{2}{3} - \left[x + \frac{2}{3} \right] - \frac{2}{3}$$

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{x \rightarrow x + \frac{2}{3}} 0 \leq x + \frac{2}{3} - \left[x + \frac{2}{3} \right] < 1$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{3}} -\frac{2}{3} \leq x + \frac{2}{3} - \left[x + \frac{2}{3} \right] - \frac{2}{3} < 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow \exists \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

۱۳- نمودار $y = [x] - x$ خط $x = 3y + 3$ را در چند نقطه قطع می کند؟

۴ (۴)

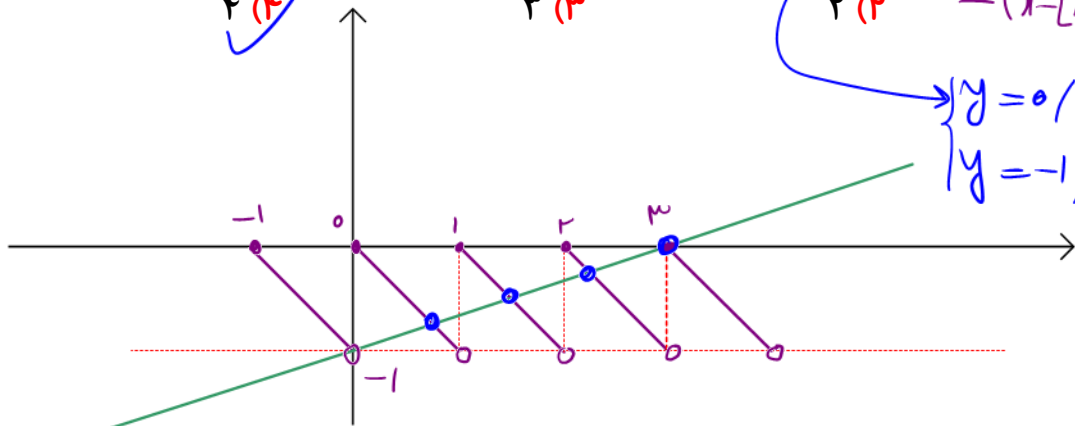
۳ (۳)

۲ (۲)

$-(x - [x])$ ۱ (۱)

$y = 0 / x = 3$

$y = -1 / x = 0$



$x = 3y + 3$

۱۴- معادله $[x] = 4x$ چند ریشه دارد؟

(۱) یک

(۲) سه

(۳) بیشتر از سه

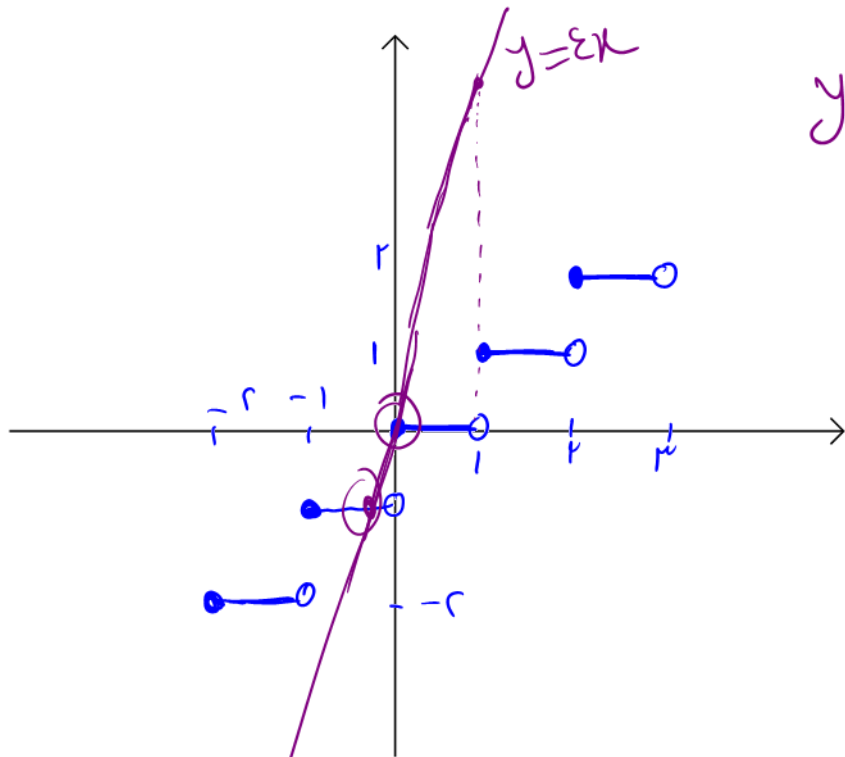
(۴) دو

$$\varepsilon x = k \Leftrightarrow x = \frac{k}{\varepsilon}$$

$$\left[\frac{k}{\varepsilon} \right] = k \rightarrow \left[\frac{k}{\varepsilon} - k \right] = 0 \rightarrow 0 < -\frac{k}{\varepsilon} < 1$$

$$-\frac{\varepsilon}{4} < k \leq 0 \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow k = 0, -1$$

$$\rightarrow x = 0, -\frac{1}{\varepsilon}$$



۱۵- معادله $2x^2 + x + [x] + [-x] = 0$ چند ریشه دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)

$$x \in \mathbb{Z} : [x] + [-x] = 0 \rightarrow 2x^2 + x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x \notin \mathbb{Z} : [x] + [-x] = -1 \rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

آزمون

۱۶- اگر $a > 0 > b$ باشد، حاصل $|a-b| + |b-1| - |a+1|$ برای کدام است؟

$$-2 \quad (۴)$$

$$2a - 2b + 2 \quad (۳)$$

$$-2b \quad (۲)$$

$$-2a \quad (۱)$$

$$a-b - b+1 - (a+1) = -2b$$

۱۷- اگر $|x-1| \leq 2$ باشد، مجموع بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = |3x-5| + 2$ برابر کدام است؟

۱۶ (۴)

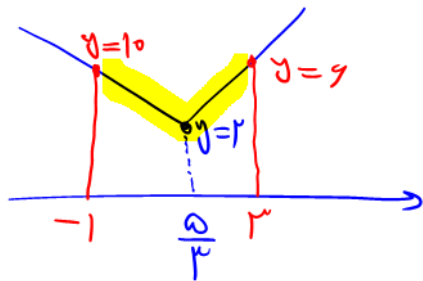
۱۴ (۳)

۱۲ (۲) ✓

۱۰ (۱)

$$-2 \leq x-1 \leq 2 \rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

$$\begin{cases} \text{Min} = 2 \\ \text{Max} = 10 \end{cases}$$



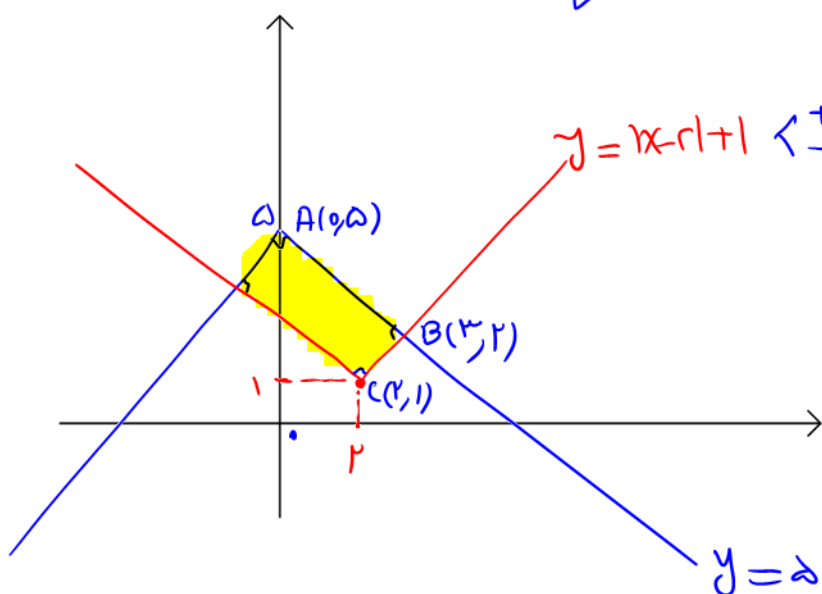
۱۸- مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع‌های $y = |x-2|+1$ و $y = 5-|x|$ چقدر است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)



$y = |x-2|+1 \begin{cases} +x \\ -x \end{cases}$

$$\begin{cases} |x-2|+1 = 5-|x| \\ x > 2: \\ x-2+1 = 5-x \\ x = 3 \end{cases}$$

$AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow S = (3\sqrt{2})(\sqrt{2})$

$S = 6$

۳۴

۱۹- معادله $\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 3| = 3$ چند جواب صحیح دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۹ (۲)

۱۰ (۱) ✓

$$|\sqrt{x} - 3| = 3 - \sqrt{x}$$

$$|A| = -A \Rightarrow A \leq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 3 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} \leq 3 \rightarrow$$

$$\underline{0 \leq x \leq 9}$$

$$x = 0, 1, 4, \dots, 9$$

۲۰- مجموع ریشه‌های معادله $|x^2 - 2| = 2x - 1$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

$3 + \sqrt{2}$ (۲)

$2 + \sqrt{2}$ (۱) ✓

$$\begin{cases} x^2 - 2 = 2x - 1 \\ x^2 - 2 = -2x + 1 \end{cases} \quad 2x - 1 \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \quad x \geq \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = -1 \pm \sqrt{2} = -3, 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow x \in \{1 + \sqrt{2}, 1\}$$

۲۱- مجموع ریشه‌های معادله $x|x-4|=2x-1$ کدام است؟

۴ (۴)

۸ (۳)

$7+\sqrt{2}$ (۲)

$5+2\sqrt{2}$ (۱) ✓

$$x > 4 : x(x-4) = 2x-1 \rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \rightarrow x = 2 + \sqrt{3}$$

$$x < 4 : x(4-x) = 2x-1 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$$

$$(1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) + (2+\sqrt{3}) = 5 + \sqrt{3}$$

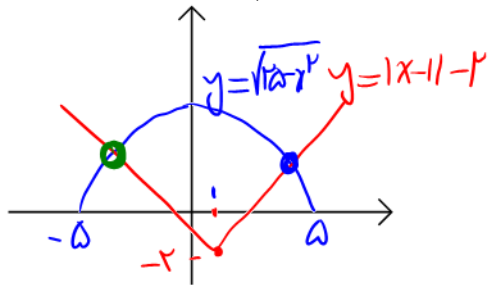
۲۲- مجموع ریشه‌های معادله $\sqrt{25-x^2} = |x-1| - 2$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{41}-6}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{41}-5}{2} \quad (۳) \checkmark$$

۲ (۲)

۱ (۱)



$$\sqrt{25-x^2} = x-3$$

$$25-x^2 = x^2-6x+9 \rightarrow 2x^2-6x-14=0$$

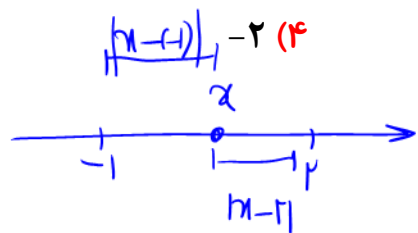
$$x^2-3x-7=0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2} \rightarrow \left(\frac{3+\sqrt{41}}{2} \right)$$

$$\sqrt{25-x^2} = -x-1 \rightarrow 25-x^2 = x^2+2x+1 \rightarrow 2x^2+2x-24=0$$

$$x^2+x-12=0 \rightarrow x = 3, -4 \rightarrow (-4)$$

$$\frac{3+\sqrt{41}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{41}-5}{2}$$

۲۳- دو نقطه‌ی A و B روی محور اعداد حقیقی چنان قرار گرفته‌اند که فاصله‌ی هر یک، از نقطه‌ی ۲ ، از دو برابر فاصله‌اش تا نقطه‌ی -۱ ، یک واحد بیشتر است. حاصل ضرب طول نقاط A و B کدام است؟



-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) ✓

$A, B : x$

$$|x - 2| = 2|x + 1| + 1$$

$$\begin{cases} x < -1 & : -x + 2 = -2x - 2 + 1 \rightarrow x = -3 \rightarrow x_A = -3 \\ -1 \leq x \leq 2 & : -x + 2 = 2x + 2 + 1 \rightarrow x = -\frac{1}{3} \rightarrow x_B = -\frac{1}{3} \\ x > 2 & : x - 2 = 2x + 2 + 1 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

۲۴- جواب نامعادله $\left| \frac{2x-1}{x+1} \right| < 3$ با جواب کدام نامعادله برابر است؟

$$|5x+9| > 11 \quad (2)$$

$$|5x+11| > 9 \quad (1) \checkmark$$

$$|5x+9| < 11, x \neq -1 \quad (4)$$

$$|5x+11| < 9, x \neq -1 \quad (3)$$

$$|2x-1| < 3|x+1| \quad (x \neq -1)$$

$$(2x-1)^2 < (3x+3)^2 \rightarrow \underbrace{(3x+3)^2} - \underbrace{(2x-1)^2} > 0 \Rightarrow (3x+2)(x+4) > 0$$

$$x < -2 \leq x > -\frac{2}{3} \xrightarrow{\frac{-2-\frac{2}{3}}{1} = -\frac{11}{3} \rightarrow -\frac{11}{3}} x + \frac{11}{3} < \frac{4}{3} \leq x + \frac{11}{3} > \frac{4}{3}$$

$$\left| x + \frac{11}{3} \right| > \frac{4}{3} \xrightarrow{\times 3} |5x+11| > 9$$

۲۵- مجموع کوچکترین عدد صحیح مثبت و بزرگترین عدد صحیح منفی که در نامعادله‌ی

$$|3x-1| > x+7 \text{ صدق می‌کنند برابر چقدر است؟}$$

۴ (۴)

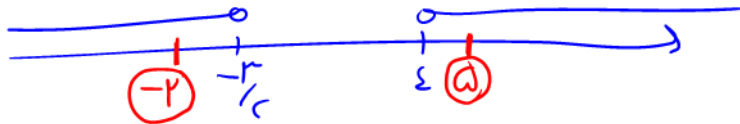
۳ (۳) ✓

۲ (۲)

۱ (۱)

$$3x-1 < -x-7 \quad \vee \quad 3x-1 > x+7$$

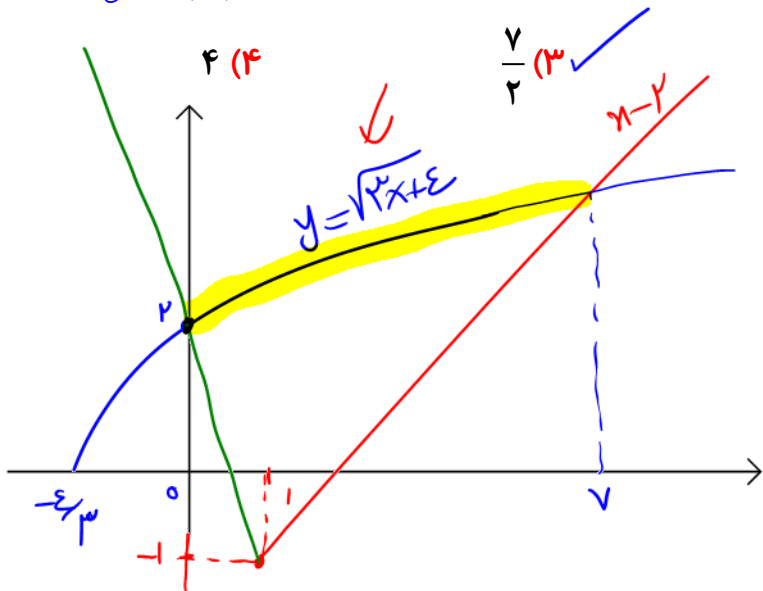
$$x < -\frac{3}{2} \quad \vee \quad x > 4$$



۲۶- اگر مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{3x+4} > 2|x-1| - x$ بازه (a,b) باشد، طول وسط این بازه،

(سراسری ریاضی ۹۵)

کدام است؟



۳ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

$$y = 2|x-1| - x = \begin{cases} 2-2x & x \geq 1 \\ -3x+2 & x < 1 \end{cases}$$

$x \in (0, v)$

$\frac{0+v}{2} = \frac{v}{2}$

۲۷- در بازه (a, b) ، نمودار تابع با ضابطه $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیشترین

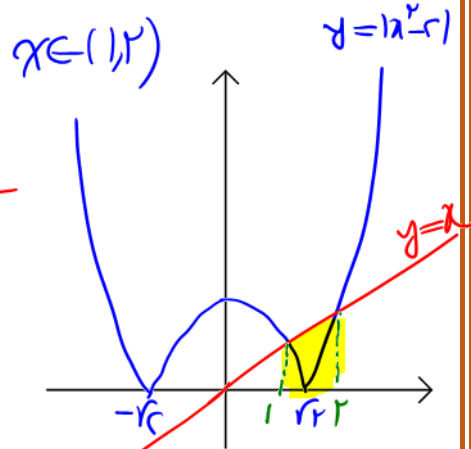
(سراسری تیرگی ۹۹)

مقدار $b - a$ ، کدام است؟

۴ (۴)
۳ (۳)
۲ (۲)
۱ (۱) ✓

$$|2x^2 - 4| < 2x \rightarrow |x^2 - 2| < x \rightarrow -x < x^2 - 2 < x$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$$



۲۸- اگر n عدد طبیعی دو رقمی باشد، حاصل $3[\sqrt{n^2 + 7n + 3}] - [\sqrt{9n^2 - 6n}]$ برابر کدام است؟

۴ به n بستگی دارد.

۳

۲ ✓

۱

$$\underbrace{(n+3)^2}_{n^2+6n+9} < n^2+7n+3 < \underbrace{(n+4)^2}_{n^2+8n+16} \rightarrow n+3 < \sqrt{n^2+7n+3} < n+4$$

$$\rightarrow [\sqrt{n^2+7n+3}] = n+3$$

$$4n+9 < 7n+3 \rightarrow 6 < 3n \checkmark$$

$$\sqrt{9n^2-6n} = \sqrt{(3n-1)^2-1} < \overset{3n-1}{3n-1} \Rightarrow [\sqrt{9n^2-6n}] = 3n-2$$

$$3(n+3) - (3n-2) = 11$$

۴۴

۲۹- اگر $x + |2x - 1| < 5$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای $\lfloor \sqrt{8 - 3x} \rfloor$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

$$|2x - 1| < 5 - x$$

$$n - 5 < 2x - 1 < 5 - x$$

$$\underbrace{-5 < 2x - 1}_{-5 < 2x} \quad \underbrace{2x - 1 < 5 - x}_{x < 2}$$

$$-5 < x < 2$$

$$-5 < x < 2 \rightarrow 2 < 1 - 3x < 10$$

$$\underbrace{\sqrt{2} < \sqrt{1 - 3x} < \sqrt{10}}_{\substack{\text{مقدار} \\ \text{مستقیم}}}$$

$$\lfloor \sqrt{1 - 3x} \rfloor = 1, 2, 3, 4$$

۳۰- مجموعه اعضای برد تابع $f(x) = [4x] - ۴[x] + ۱$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

$$f(x) = [4x - 4[x]] + 1 = [4(x - [x])] + 1$$

$$\circ (x - [x]) \in (0, 1)$$

$$\circ (4(x - [x])) \in (0, 4)$$

$$[4(x - [x])] = 0, 1, 2, 3 \xrightarrow{+1} R_f = \{1, 2, 3, 4\}$$

۳۱- نمودار تابع $y = 2x - 4\left[\frac{x}{2}\right]; x \in [-2, 2)$ از n پاره خط مساوی به اندازه l تشکیل شده است.

دوتایی مرتب (n, l) کدام است؟

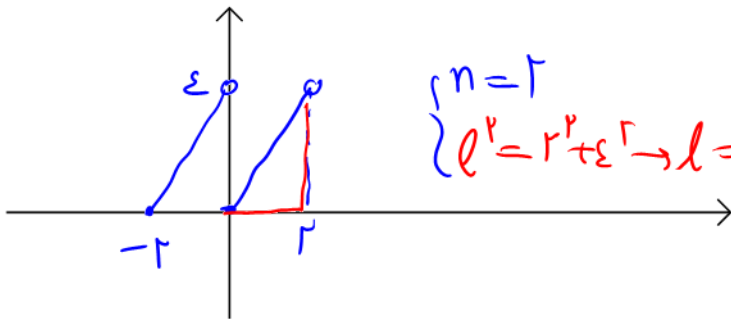
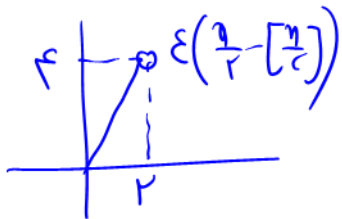
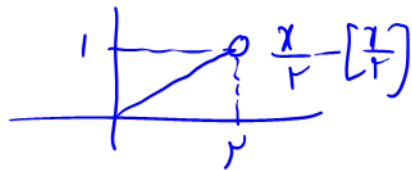
$(1, 2\sqrt{5})$ (۴)

$(1, \sqrt{5})$ (۳)

$(2, 2\sqrt{5})$ (۲) ✓

$(2, \sqrt{5})$ (۱)

$$y = 4\left(\frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right]\right)$$



$$\begin{cases} n = 2 \\ l^2 = 2^2 + 4^2 \rightarrow l = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

۳۲- تعداد و مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\left[\frac{x+1}{2}\right] = \frac{x-1}{3}$ به ترتیب کدام است؟

$$\frac{x-1}{3} = k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = 3k + 1$$

$$\left[\frac{3k+1}{2}\right] = k \Rightarrow k \leq \frac{3k+1}{2} < (k+1)$$

$$\begin{cases} 2k \leq 3k+1 \rightarrow -1 \leq k \\ 3k+1 < 2k+2 \rightarrow k < 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$-1 \leq k < 1$$

$$k \in \mathbb{Z} \rightarrow k = -1, 0$$

$$x = -2, -1$$

(۱) دو ریشه و مجموع آنها برابر ۳-

(۲) سه ریشه و مجموع آنها برابر ۳-

(۳) دو ریشه و مجموع آنها برابر ۷- ✓

(۴) سه ریشه و مجموع آنها برابر ۷-

۳۳- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $6x^2 - 5x + 1 + [3x] + [-3x] = 0$ کدام است؟

$$\frac{5}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{4}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{7}{6} \text{ (۱)} \quad \checkmark$$

$3x \in \mathbb{Z} \rightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \rightarrow x = \frac{1}{6}$

$3x \notin \mathbb{Z} \rightarrow 6x^2 - 5x = 0 \rightarrow x = 0, \frac{5}{6} \rightarrow x = \frac{5}{6}$

$$\left\{ \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right\}$$

۳۴- هر x در بازه (a, b) در نامعادله $\sqrt{x} < \sqrt{2}$ صدق می کند. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۴ (۴) ✓

۸ (۳)

۲ (۲)

۲√۲ (۱)

$$\sqrt{x} < \sqrt{2} \Rightarrow [\sqrt{x}] \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow 0 < x < 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow 0 < x < 4 \rightarrow b - a = 4$$

۳۵- معادله $\left[\frac{x+1}{x}\right] + \left[\frac{x-1}{x}\right] = 2$ چند ریشه در بازه $(0, 2)$ دارد؟

۴ (۴) ✓

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

$$\left[1 + \frac{1}{x}\right] + \left[1 - \frac{1}{x}\right] = 2 \Rightarrow 1 + \left[\frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] + 1 = 2 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{x} = 9, 7, 1, 9$$

$$0 < x < 2 \implies 0 < \frac{1}{x} < 10$$

$$x \in \left\{ \frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{1}, \frac{1}{9} \right\}$$