

# کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل ششم : لگاریتم

مهر داد عباسپور

$$* \log_{\sqrt{p}} \sqrt{p} = \log_{(\sqrt{p})^{\frac{1}{2}}} (\sqrt{p})^{\frac{1}{2}} = \log_9^1$$

## ویژگی‌های لگاریتم

$$\log_b^a = c \Leftrightarrow a = b^c$$

$$\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$$

$$\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$* \log_b^a = \log_{b^n}^{a^n}$$

$$* n = \log_a^{a^n}$$

$$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

$$\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$p = \log_{\sqrt{p}} p^p$$

$$a^{\log_a^b} = b$$

$$\log_c^{\log_a^b} = b^{\log_c^a}$$

$$p^{\log_a^a} = a^{\log_p^1} = a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$$

$$* \log_2 + \log_5 = \log(10) \Rightarrow \begin{cases} \log_5 = 1 - \log_2 \\ \log_2 = 1 - \log_5 \end{cases}$$

رابطه‌ی  $\log_2$  و  $\log_5$ :

Điều:  $\log_{\frac{1}{p}} r_{x-1} > -\mu$

~~$\log_{\frac{1}{p}} r_{x-1} > \log_{\frac{1}{p}} (r_{x-1})^{-\mu}$~~   $\rightarrow$   $r_{x-1} < 1$   
 $r_{x-1} > 0 \rightarrow \frac{1}{p} < r_{x-1} < \frac{q}{p}$

# نامساوی‌ها و نامعادلات نمایی و لگاریتمی

$$a > 1 : \begin{cases} x > y \Leftrightarrow a^x > a^y \\ x > y > 0 \Leftrightarrow \log_a^x > \log_a^y \end{cases}$$

$$0 < a < 1 : \begin{cases} x > y \Leftrightarrow a^x < a^y \\ x > y > 0 \Leftrightarrow \log_a^x < \log_a^y \end{cases}$$

شرط تعریف شدن  $\log_b^a$  :

$$a > 0, b > 0, b \neq 1$$

~~$$2^x > 2^{x+1} \rightarrow x > x+1$$~~

~~$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \rightarrow x < x+1$$~~

~~$$\log_{\frac{1}{2}}^x > \log_{\frac{1}{2}}^{x+1} \rightarrow$$~~

$$\begin{aligned} x &> x+1 \\ x &> 0, x+1 > 0 \end{aligned}$$

~~$$\log_{\frac{1}{2}}^x > \log_{\frac{1}{2}}^{x+1}$$~~

$$\begin{aligned} x &< x+1 \\ x &> 0, x+1 > 0 \end{aligned}$$

## نمودار توابع نمایی و لگاریتمی

توابع نمایی و لگاریتمی تابع وارون یکدیگرند :

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a^y \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a^x$$

$$f(x) = 2^{3x+1} - 2 = y \Rightarrow 2^{3x+1} = y+2 \Rightarrow 3x+1 = \log_2^{y+2}$$

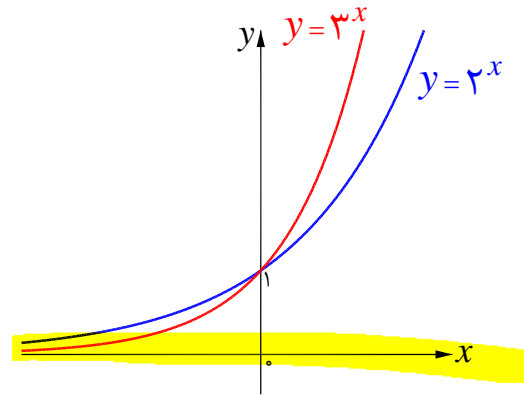
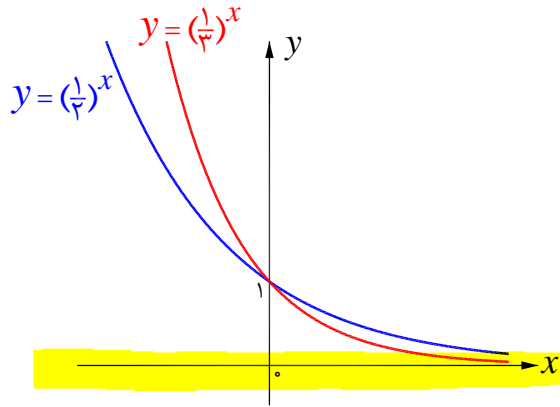
$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} (\log_2^{y+2} - 1) \quad \text{ولایت تابع}$$

$$f(x) = 1 + 2 \log_{\frac{1}{3}}^{1-x} = y \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}^{1-x} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow 1-x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y-1}{2}}$$

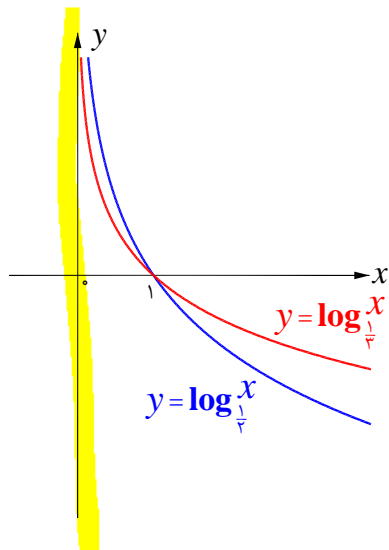
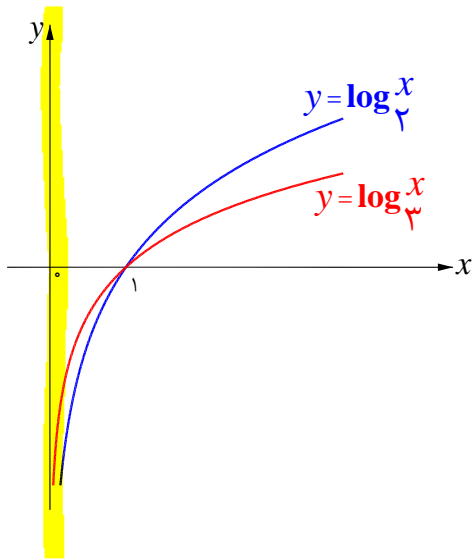
ولایت تابع

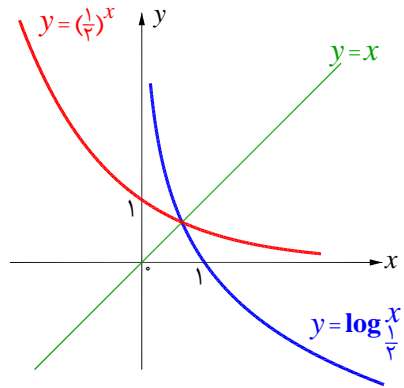
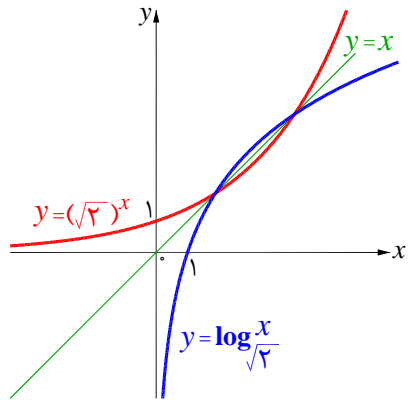
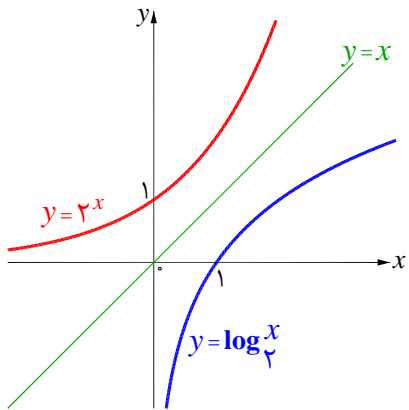
$$\Rightarrow x = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y-1}{2}}$$

• نمودار توابع  $y = a^x$  برای مقادیر  $a > 1$  و  $0 < a < 1$



نمودار توابع  $y = \log_a^x$  برای مقادیر  $a > 1$  و  $0 < a < 1$

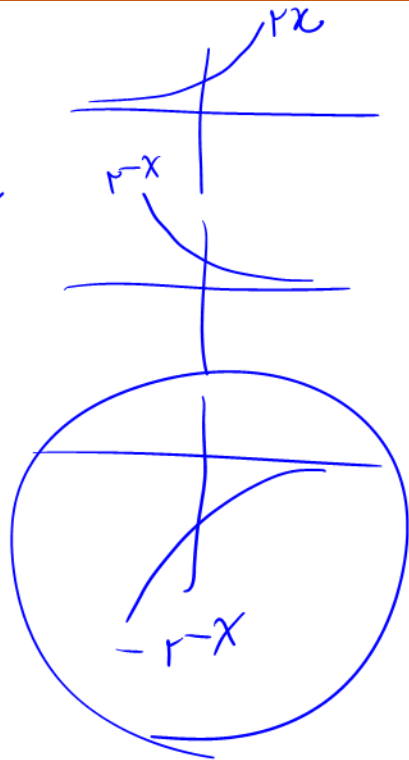
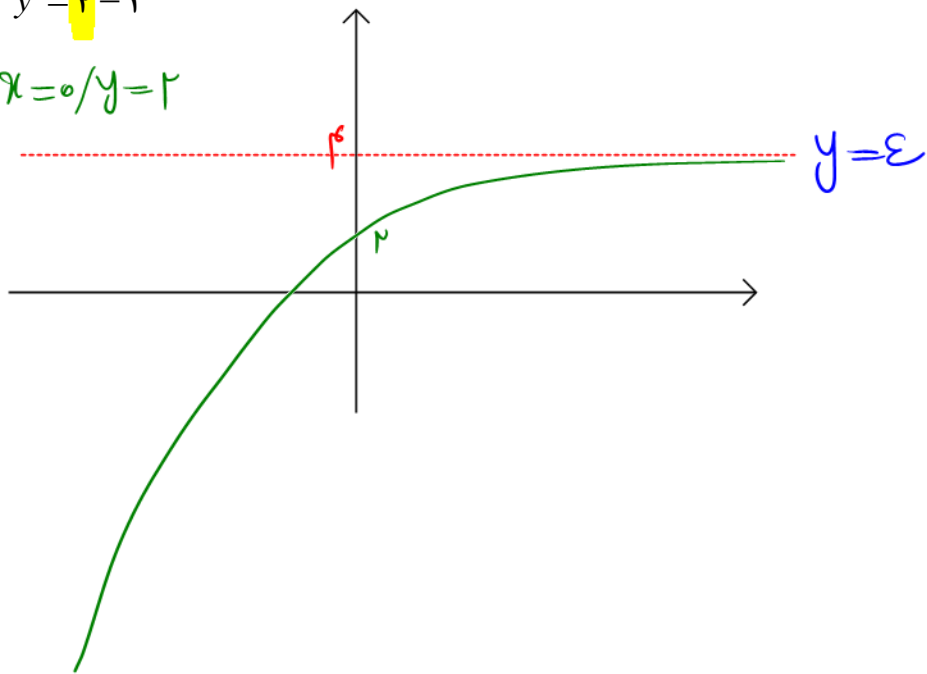


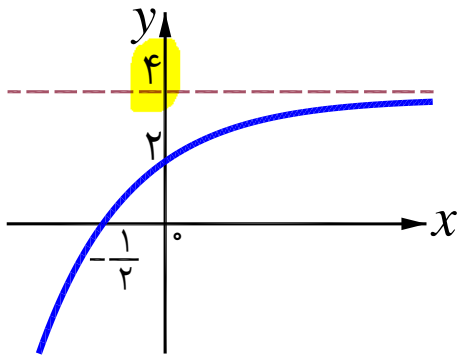




$$y = r - r^{1-2x}$$

$$x=0/y=r$$





$$y = a - b^{1-cx}$$

$$a = \varepsilon$$

$$y = \varepsilon - b^{1-cx}$$

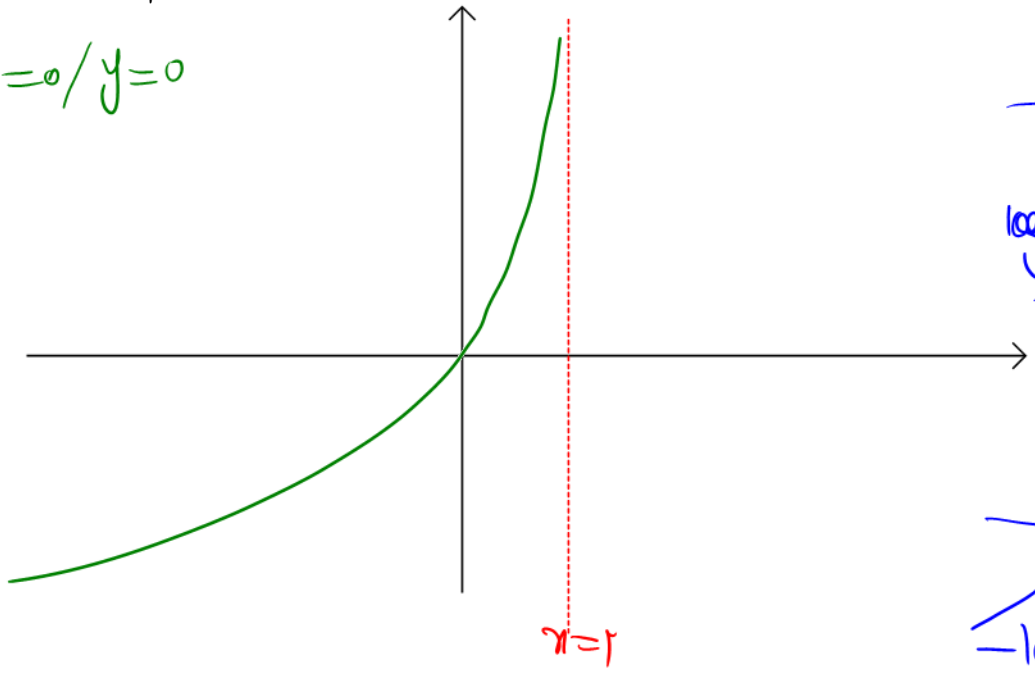
$$\begin{cases} (0, r) \\ (-\frac{1}{r}, 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \varepsilon - b^{1-0} \\ 0 = \varepsilon - b^{1+\frac{c}{r}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = r \\ \end{cases}$$

$$\varepsilon = r^{1+\frac{c}{r}} \rightarrow 1 + \frac{c}{r} = r \rightarrow c = r$$

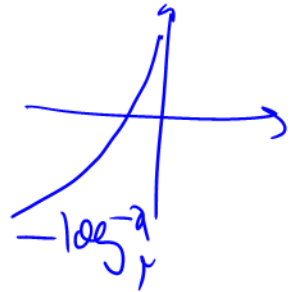
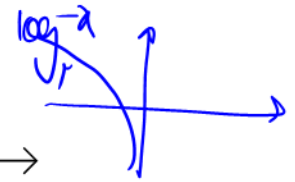
$$y = 1 - \log_r(r-x)$$

$$\text{E, } r-x=0 \rightarrow x=r$$

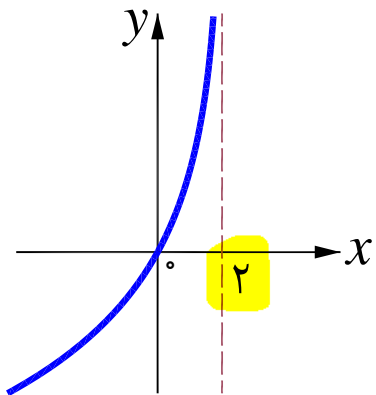
$$x=0/y=0$$



$$x=r$$



11



$$y = a - \log_r(b-x)$$

$$\rightarrow b-x=0 \quad x=r$$

$$b-r=0 \quad (b=r)$$

$$y = a - \log_r(b-x)$$

$$(0,0) \rightarrow 0 = a - \log_r b \rightarrow (a=1)$$

# کمیت‌هایی با تخییرات زمانی در زمان

**مثال:** کالایی در هر ماه ۸٪ گران می‌شود. با گذشت چند ماه قیمت آن ۵ برابر می‌شود؟

$$(\log 2 \approx 0,301, \log 3 \approx 0,477)$$

$$(1/0,92)^n = 5 \rightarrow \log(1/0,92)^n = \log 5$$

$$n \log \frac{100}{108} = \log \frac{10}{2}$$

$$n (\log 100 - \log 108) = \log 10 - \log 2$$

$$n = \frac{1 - \log 2}{\log 2 + 2 \log 3 - 2} = \frac{1 - \log 2}{2 \log 2 + 2 \log 3 - 2}$$

نرخ دریا در ماه قیمت آن

در هر ۱ + ۰,۰۸

دریا در n ماه قیمت آن

$(1/0,92)^n$

**مثال:** اگر نیمه عمر یک عنصر ۱۸ ساعت باشد، و ۱۰۰ گرم از این عنصر داشته باشیم، پس از چند

روز فقط ۱ گرم از آن باقی می ماند؟ ( $\log 2 = 0.3$ )

$$100 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{100} \rightarrow 2^n = 100$$

$$\log 2^n = \log 100 \rightarrow n \log 2 = 2$$

$$n = \frac{2}{\log 2} \approx \frac{2}{0.3} = \frac{10}{3}$$

در پایان هر ۱۸ ساعت:  $\frac{1}{2} \times ۴۰$

۱۸ ساعت:  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \times ۴۰$

$$\frac{10}{3} \times 18 = 120 \text{ h}$$
$$= 5 \text{ day}$$

۱- اگر  $\log_c^{ab} = 3$  و  $\log_{ac}^b = 4$  باشد، حاصل  $\log_b^a$  چقدر است؟

$$-\frac{1}{16} \text{ (۴) } \checkmark$$

$$\frac{1}{16} \text{ (۳)}$$

$$-16 \text{ (۲)}$$

$$16 \text{ (۱)}$$

$$\begin{array}{l}
 ab = c^{\mu} \quad \left. \begin{array}{l} \text{توان } \varepsilon \\ \text{توان } \mu \end{array} \right\} \\
 b = (ac)^{\varepsilon} \quad \left. \begin{array}{l} \text{توان } \varepsilon \\ \text{توان } \mu \end{array} \right\}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 a^{\varepsilon} b^{\varepsilon} = c^{12} \\
 b^{\mu} = a^{12} c^{12}
 \end{array} \right\} \rightarrow b^{\mu} = a^{12} \times a^{\varepsilon} b^{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{b} = a^{14} \rightarrow b = a^{-14}$$

$$\log_b^a = \log_{a^{-14}}^a = -\frac{1}{14}$$

۲- با فرض  $\log 2 = 0,3$  و  $\log 7 = 0,8$  حاصل  $\log \sqrt[3]{\frac{7}{25}}$  برابر کدام است؟

$$-\frac{2}{5} \text{ (۴)}$$

$$-\frac{3}{4} \text{ (۳)}$$

$$-\frac{1}{5} \text{ (۲) ✓}$$

$$-\frac{1}{4} \text{ (۱)}$$

$$\frac{1}{3} \log \frac{7}{25} = \frac{1}{3} (\log 7 - \log 25) = \frac{1}{3} (\log 7 - 2 \log 5)$$

$$\frac{1}{3} (\log 7 - 2(1 - \log 2)) \approx \frac{1}{3} (0,8 - 2(1 - 0,3)) = -0,2 = -\frac{1}{5}$$



۳- حاصل  $3^{1+2\log_3^2}$  برابر کدام است؟

۹ (۲)

۶ (۱)

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

$$a^{m+n} = a^m \times a^n$$

$$3^1 \times 3^{2\log_3^2} = 3 \times 3^{\log_3^2} = 3 \times 3 = 9$$

۴- عدد  $15^{30}$  چند رقمی است؟ ( $\log 2 \approx 0,3$ ,  $\log 3 \approx 0,48$ )

۳۷ (۴)

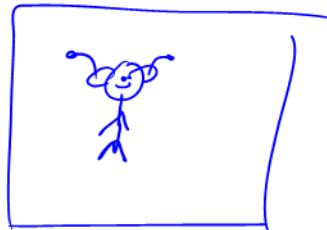
۳۶ (۳)

۳۵ (۲)

۳۴ (۱)

$$\log 15^{30} = 30 \log 15 = 30 (\underbrace{\log 3 + \log 5}_{1 - \log 2})$$

$$\approx 30 (0,48 + 0,7) = 30 \times 1,18 = 35,4 \rightarrow \overline{36}$$





$$\log_{10} |V| \approx r, m \quad 10^r < |V| < 10^{r+m}$$

$$\log_{10} |E| \approx r, m \quad 10^r < |E| < 10^{r+m}$$

$$\log_{10} n \approx k, m \Rightarrow \text{در طبقه } n \text{ دوازده } k+1 \text{ رقم است}$$

(سراسری تهرانی ۹۹)

۵- اگر  $\log_4^3 = 0,8$  باشد، مقدار  $\log_{12}^6$ ، کدام است؟

$$\frac{7}{9} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۳)}$$

$$\frac{8}{11} \text{ (۲)}$$

$$\frac{13}{18} \text{ (۱) ✓}$$

$$\log_{12}^6 = \frac{\log_4^6}{\log_4^{12}} = \frac{\log_4^2 + \log_4^3}{\log_4^6 + \log_4^3} = \frac{\frac{1}{2} + 0,8}{1 + 0,8} = \frac{1,3}{1,8}$$

$$\log_4^3 = 0,8 \rightarrow 3 = 4^{0,8} = (2^2)^{0,8} \rightarrow 3 = 2^{1,6}$$

$$\log_{12}^6 = \log_{2^2 \times 3}^{2 \times 3} = \log_{2^2 \times 3}^{2 \times 3} = \log_{2^2 \times 3}^{2 \times 3} = \frac{1,6}{1,6}$$

۶- از رابطه‌ی  $\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1)$  مقدار لگاریتم  $(2x+5)$  در پایه‌ی ۴، کدام

(سراسری ریاضی ۹۷)

است؟

۱/۵ (۴) ✓

۱/۲۵ (۳)

۰/۷۵ (۲)

۰/۵ (۱)

$$(x+2)(2x-1) = 4x+1$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow x = -1, \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \rightarrow \log_{\frac{1}{4}}^{2x+5} = \log_{\frac{1}{4}}^1 = \log_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

(سراسری تهرانی ۹۱)

۷- اگر  $(\frac{5}{4})^{2x-1} = (\frac{125}{8})^{x^2}$  باشد،  $\log_8(9x+1)$  کدام است؟

$$\frac{2}{2} (4)$$

$$\frac{4}{3} (3)$$

$$\frac{2}{4} (2)$$

$$\frac{2}{3} (1)$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = \left(\left(\frac{5}{2}\right)^3\right)^{x^2} \rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{-2x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x^2}$$

$$3x^2 = -2x+1 \rightarrow 3x^2+2x-1=0 \rightarrow x = -1, \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} \rightarrow \log_8^{9x+1} = \log_8^{\frac{10}{3}} = \log_{\frac{8}{3}}^{\frac{10}{3}} = \frac{1}{3}$$

۸- حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی  $\log_2^x - \log_x^2 = \frac{1}{2}$  برابر کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۴)$$

$$2\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$\sqrt{2} \quad (۱) \quad \checkmark$$

$$\log_2^x - \log_x^2 = \frac{1}{2} \quad \log_2^x = t \Rightarrow \log_x^2 = \frac{1}{t}$$

$$t - \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2t} 2t^2 - t - 1 = 0 \quad t = 1, -\frac{1}{2}$$

$$\log_2^x = 1, -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2^1 \\ x_2 = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \rightarrow x_1 x_2 = 2^{\frac{1}{2}}$$

۹- ریشه‌ی معادله‌ی  $3^x + (\sqrt{3})^{x+2} = 10$  کدام است؟

$$\log_3^2(4)$$

$$\log_3^4(3)$$

$$\log_3^2(2)$$

$$\log_3^2(1)$$

$$\mu x + (\sqrt{\mu})^x \times (\sqrt{\mu})^2 = 10$$

$$(\sqrt{\mu})^x = t$$

$$t^2 + t(3) = 10$$

$$\mu x = t^2$$

$$\longleftrightarrow t = 2, -8 \quad t > 0 \longrightarrow t = 2$$

$$\mu x = 3 \longrightarrow x = \log_3^2 3$$



۱۰- اگر  $x$  ریشه‌ی معادله‌ی  $\log_2^{x+1} = 1 + \log_4^{x+2}$  باشد، مقدار  $\log_{x-1}^2$  کدام است؟

$$\frac{2}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{4}{3} \text{ (۳)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۲) ✓}$$

$$\frac{3}{2} \text{ (۱)}$$

$$\log_{2^2}^{(x+1)^2} = \log_{\Sigma}^{\Sigma} + \log_{\Sigma}^{x+2} \rightarrow$$

$$(x+1)^2 = \Sigma(x+2) \rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه}} x = 1 + \sqrt{5} \rightarrow \log_{x-1}^2 = \log_{\sqrt{5}}^2 = \log_{\sqrt{5}}^{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{5}$$

۱۱- چند عدد صحیح در دامنه‌ی تعریف تابع  $f(x) = \log_{x+1}^{15-x^2}$  وجود دارد؟

۴ (۴)

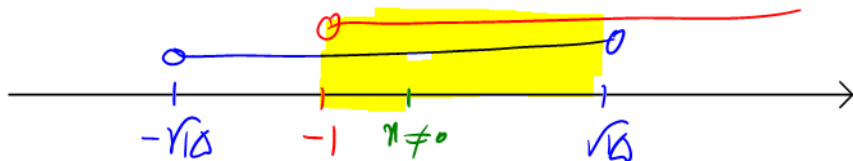
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



$$\begin{cases} 15 - x^2 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases}$$



$$D_f = (-1, \sqrt{15}) - \{0\} \longrightarrow 1, 2, 3$$

۱۲- اگر  $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$  و  $g(x) = \log_2(3x+1)$  باشند، در دامنه‌ی تابع  $f \circ g$  چند عدد صحیح قرار

دارد؟

۲۰ (۴)

۲۱ (۳)

۲۲ (۲) ✓

۲۳ (۱)

$f(g(x))$

$$D_f : 4x - x^2 \geq 0$$

$$\rightarrow 0 \leq x \leq 4$$

$$\{x \in D_g : 3x+1 > 0 \rightarrow x > -\frac{1}{3}$$

$$\{g(x) \in D_f : 0 \leq g(x) \leq 4 \rightarrow \log_2(3x+1) \leq 4 \leq \log_2(3x+1)$$

$$1 \leq 3x+1 \leq 16 \rightarrow 0 \leq x \leq 5 \rightarrow D_{f \circ g} = [0, 5]$$

۲۶

۱۳- اگر  $f(x) = 2 - 3^x$  و دامنه‌ی تعریف تابع  $g(x) = \sqrt{(x+2)f^{-1}(x)}$  بازه‌ی  $[a, b]$  باشد،

مقدار  $b - a$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳) ✓

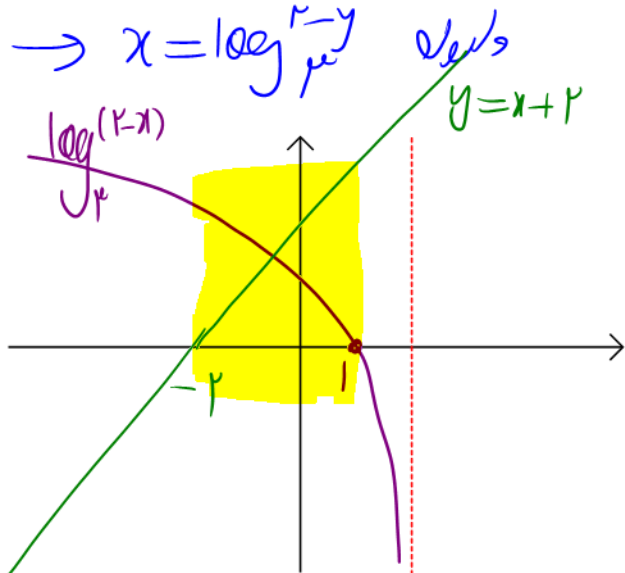
۲ (۲)

۱ (۱)

$$y = 2 - 3^x \rightarrow 3^x = 2 - y \rightarrow x = \log_3 \frac{2-y}{3}$$

$$g(x) = \sqrt{(x+2) \log_3 \frac{2-x}{3}}$$

$$D_g = [-2, 1]$$





صِدْقِ تَعْنِي كَلِمَاتٍ  
---

	-2	1	2
$\lambda + 2$	-	0	+
$\log \frac{\lambda}{\mu}$	+	+	-
حزب	-	0	-

۱۴- فرض کنید در دامنه  $[0, +\infty)$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2}$ ، مفروض باشد.  $f^{-1}(2)$ ،

(سراسری تیربی ۹۹)

کدام است؟

$\log_2(2 + \sqrt{3})$  (۴)  $\log_2(1 + \sqrt{3})$  (۳)  $\log_2(\sqrt{3} - 1)$  (۲)  $\log_2(2 - \sqrt{3})$  (۱)

$$\frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2} = 2 \rightarrow t + \frac{1}{t} = 4 \rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t = 2 \pm \sqrt{3} \quad x \geq 0 \rightarrow 2^x \geq 2^0 \rightarrow 2^x \geq 1$$

$$t \geq 1$$

$$t = 2 + \sqrt{3} \rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{3}$$

۱۵- نمودار یک تابع به صورت  $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}$  ، نمودار تابع  $y = x^2 - x$  را در دو نقطه به

(سراسری ریاضی ۹۸)

طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند.  $f(3)$  کدام است ؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B} - 2 = x^2 - x$$

$$x=1 : \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} - 2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 2$$

$$A+B = -1$$

$$x=2 : \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} - 2 = 2$$

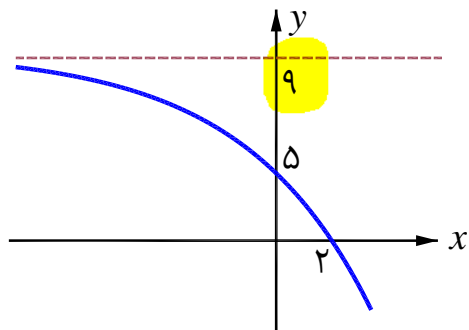
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 4$$

$$2A+B = -5$$

$$A = -1, B = 0 \rightarrow f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$$

$$f(x) = 2^x - 2$$

۱۶- شکل زیر، نمودار تابع  $f(x) = c - 2^{ax+b}$  است. عدد  $a$  برابر کدام است؟



$$c = 9$$

$$\log_2^3 - 1 \quad (2) \quad \checkmark \quad 1 + \log_2^3 \quad (1)$$

$$1 - \log_2^3 \quad (4) \quad 1 + \log_2^3 \quad (3)$$

$$f(x) = 9 - 2^{ax+b}$$

$$A(2, 0) : 9 - 2^{2a+b} = 0$$

$$B(0, 5) : 9 - 2^b = 5 \rightarrow 2^b = 4 \rightarrow b = 2$$

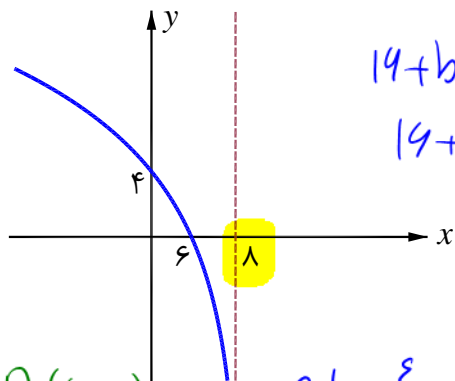
$$2^{2a+2} = 9 \quad (2^{a+1})^2 = 3^2 \rightarrow 2^{a+1} = 3 \rightarrow a+1 = \log_2^3$$

$$\rightarrow a = \log_2^3 - 1$$

۳۰



۱۷- شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $f(x) = a \log_2^{16+bx} + c$  است. مقدار  $f^{-1}(1)$  برابر کدام است؟



$$16+bx=0 \xrightarrow{x=1}$$

$$16+1b=0 \rightarrow b=-16$$

$$f(x) = a \log_2^{16-16x} + c$$

$$-16 \quad (2)$$

$$-24 \quad (4)$$

$$-14 \quad (1)$$

$$-18 \quad (3)$$

$$A(6, 4) \rightarrow a \log_2^8 + c = 0$$

$$B(8, 0) \rightarrow a \log_2^{16} + c = 0$$

$$\begin{cases} 2a + c = 0 \\ 4a + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 2 \log_2^{16-16x} - 2$$

$$f^{-1}(1) = x \rightarrow f(x) = 1 \rightarrow 2 \log_2^{16-16x} - 2 = 1$$

$$\rightarrow \log_2^{16-16x} = 9 \rightarrow 16-16x = 2^9 \rightarrow x = -\frac{2^9 - 16}{16}$$

۱۸- با توجه به رابطه‌ی انرژی آزاد شده در زلزله، ( $\log E = 11,8 + 1,5M$ ) مقدار انرژی آزاد شده در

زلزله‌ی ۷ ریشتر، تقریباً چند برابر مقدار انرژی آزاد شده در زلزله‌ی ۶/۲ ریشتر است؟

$$(\sqrt[10]{10} = 1,3)$$

۱۷ (۲)

۱۳ (۱)

۲۷ (۴)

۲۳ (۳)

$$\begin{aligned} \log E_1 &= 11,8 + 1,5 \times 7 \\ \log E_2 &= 11,8 + 1,5 \times 6,2 \end{aligned} \quad \ominus \quad \log E_1 - \log E_2 = \frac{1,5(7 - 6,2)}{1}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \log \frac{E_1}{E_2} &= 1,2 \rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{1,2} = 10^1 \times 10^{0,2} = 10 \times \sqrt[10]{10^2} \\ &\approx 10(1,3)^2 = 16,9 \end{aligned}$$

۱۹- یک قایق کاملاً بادی، روزانه ۵ درصد بادش را از دست می‌دهد، باد این قایق پس از چند روز، به

(سراسری ریاضی ۹۷)

نصف باد روز اول می‌رسد؟  $(\log 19 = 1,287, \log 2 = 0,301)$

۲۵ (۴)

۲۱/۵ (۳) ✓

۱۸/۵ (۲)

۱۷ (۱)

$$(1 - 0,05)^n = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{95}{100}\right)^n = \frac{1}{2} \rightarrow n \log \frac{95}{100} = \log \frac{1}{2}$$

$$n (\log 95 - \log 100) = -\log 2 \rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 100 - \log 95}$$

$$n = \frac{\log 2}{2 - (\log 5 + \log 19)} = \frac{\log 2}{1 + \log 2 - \log 19} \approx \frac{0,301}{0,014} = \frac{301}{14} = \frac{301 \times 14}{21} = \frac{4214}{21} = \frac{200}{14} = \frac{100}{7} \approx 14,28$$

۳۳

۲۰- نیمه عمر عنصری ۱۵ روز و جرم اولیه‌ی یک نمونه از آن ۲۰۰ گرم است. پس از چند روز جرم آن به ۵ گرم می‌رسد؟ ( $\log 2 \approx 0.3$ )

۸۰ (۴) ✓

۶۰ (۳)

۵۰ (۲)

۴۰ (۱)

$$2^n \times 15 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 200 = 5 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{40}$$

$$2^n = 40 \rightarrow n \log 2 = \log 40 \rightarrow n = \frac{\log 40}{\log 2}$$

$$n = \frac{\log 4 + \log 10}{\log 2} = \frac{2 \log 2 + 1}{\log 2} \approx \frac{2 \times 0.3 + 1}{0.3} = \frac{1.6}{0.3}$$

$$\text{جواب} = \frac{1.6}{0.3} \times 10 = 80$$

آزمون:

۲۱- حاصل  $\left[ 2 \log \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}} \right]$  برابر کدام است؟

۵ (۱)

۶ (۲) ✓

۷ (۳)

۸ (۴)

$$\left[ \log \frac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt[3]{2}} \right] = \left[ \log \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \right] = \left[ \log \frac{(5)^3}{(\sqrt[3]{2})^3} \right] = \left[ \log \frac{125}{2} \right] = 9$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{9,3}$

$$r^9 = 125 \quad \begin{cases} r^3 = 5 \\ r^6 = 25 \end{cases}$$

۲۲- اگر  $\log 6 = a$  و  $\log 14 = b$  باشد،  $\log 21 - \log 18 + \log 20$  کدام است؟

$$b - a - 1 \quad (۴)$$

$$b + 1 - a \quad (۳)$$

$$a + b + 1 \quad (۲)$$

$$a + 1 - b \quad (۱)$$

$$(\log 2 + \log 3) - (\log 2 + 2 \log 3) + (\log 2 + \log 10)$$

$$-\log 2 + \log 6 + 1 = \log \frac{6}{2} - \log \frac{9}{2} + 1$$

$$= (\log 14 - \log 2) - (\log 6 - \log 3) + 1$$

$$= b - a + 1$$

$$a^{m-n} = a^m \div a^n$$

$$5 \frac{1}{16} \text{ (۴)}$$

۳۳- اگر  $4^{2 \log_8 \frac{2}{3}} = \sqrt[3]{A}$  باشد، عدد  $A$  برابر کدام است؟

$$5 \frac{1}{8} \text{ (۳)}$$

$$4 \frac{7}{8} \text{ (۲)}$$

$$4 \frac{1}{8} \text{ (۱)}$$

$$8^{2 \log_8 \frac{2}{3}} \div 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\log_8 \frac{9}{8}} \div 8^{\frac{2}{3}} = 9^{\log_8 \frac{9}{8}} \div 8^{\frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow 8^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$= 9^{\frac{2}{3}} \div 8^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{9}{8}\right)^2}$$

$$A = \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{11}{16} = 2 \frac{1}{16}$$

۲۴- اگر  $\log_{12}^6 = a$  باشد، حاصل  $\log_{12}^2$  برابر کدام است؟

$$\frac{5-5a}{3-a} \quad (۴)$$

$$\frac{5a-2}{a+2} \quad (۳)$$

$$\frac{1-a}{2a-1} \quad (۲) \checkmark$$

$$\frac{2+a}{6-2a} \quad (۱)$$

$$\log_{12}^9 = a \Rightarrow \frac{\log_{12}^4}{\log_{12}^2} = a \Rightarrow \frac{\log_{12}^2 + \log_{12}^2}{\log_{12}^2 + \log_{12}^2} = a$$

$$\log_{12}^2 = t \Rightarrow \frac{t+1}{2t+1} = a$$

$$\hookrightarrow \log_{12}^2 = 2 \log_{12}$$

$$\Rightarrow \underline{t+1} = \underline{2at} + a \Rightarrow t(1-2a) = a-1 \Rightarrow t = \frac{a-1}{1-2a} = \frac{1-a}{2a-1}$$



۲۵- اگر  $\log_a 9 = \frac{2}{3}$  باشد، مقدار  $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{a}$  کدام است؟

$$-\frac{2}{2} (3)$$

$$-\frac{1}{2} (3)$$

$$-2 (2)$$

$$-1 (1) \checkmark$$

$$a^{\frac{2}{3}} = 9 \rightarrow \sqrt[3]{a^2} = 3^2 \rightarrow \sqrt[3]{a} = 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$$

۲۶- از معادله  $1 - \log(x+2) = \log 2x - \log(2x-1)$  ، اگر  $\log \frac{(x-4)}{(a+40)} = \frac{1}{4}$  باشد، مقدار  $\sqrt{a}$  کدام

است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳) ✓

۸ (۲)

۷ (۱)

$$\cancel{\log \frac{10}{x+2}} = \cancel{\log \frac{2x}{2x-1}} \rightarrow \frac{2}{x+2} = \frac{x}{2x-1} \rightarrow$$

$$2x^2 + 2x = 10x - 2 \rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{11}$$

$$x = 2 + \sqrt{11} \xrightarrow{*} \log_{a+40}^{11} = \frac{1}{4} \rightarrow \log_{\sqrt{11}}^{a+40} = 4 \Rightarrow$$

$$4. a+40 = (\sqrt{11})^4 \rightarrow a+40 = 121 \rightarrow a = 81 \Rightarrow \sqrt{a} = 9$$

۲۷- ریشه‌ی معادله‌ی  $\log_2^x + \log_4^x = 1$  کدام است؟

$${}_3\log_{12}^2 \quad (۴)$$

$${}_2\log_6^2 \quad (۳) \quad \checkmark$$

$${}_2\log_3^6 \quad (۲)$$

$${}_3\log_2^6 \quad (۱)$$

$$\log_2^x + \frac{\log_2^x}{\log_2^2} = 1 \Rightarrow \log_2^x \left( 1 + \frac{1}{\log_2^2} \right) = 1$$

$$\log_2^x (1 + \log_2^2) = 1 \rightarrow \log_2^x (\underbrace{\log_2^2 + \log_2^2}_{\log_2^4}) = 1$$

$$\log_2^x = \frac{1}{\log_2^4} = \log_2^4 \Rightarrow x = 2^{\log_2^4} = 4$$

۴۱

۲۸- ریشه‌ی معادله‌ی  $\log_4(2^{x+3} + 12) - 1 = x$  کدام است؟

$$\log_4^3(4)$$

$$\log_2^3(3) \checkmark$$

$$\log_2^4(2)$$

$$\log_3^2(1)$$

$$\log_4(2^{x+3} + 12) = x + 1 \Rightarrow 2^{x+3} + 12 = 4^{x+1} \Rightarrow$$

$$2^x \cdot 2^3 + 12 = 2^{2x+2} \quad 2^x = t \rightarrow 4^x = t^2 \Rightarrow$$

$$8t + 12 = 4t^2 \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+1) = 0$$

$$\begin{cases} t = -1 & t > 0 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow 2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$$

۲۹- اگر  $\log_2^x - \log_4^{x+1} = 1$  و  $\log_8^{x-2} + \log_y^9 = 1$  باشد، مقدار  $y$  کدام است؟

$3\sqrt{3}$  (۴)

~~۸۱ (۳)~~

$\sqrt{3}$  (۲)

۳ (۱)

$$\log_2^{x^2} - \log_4^{x+1} = 1 \Rightarrow \log_2 \frac{x^2}{x+1} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = 2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow \log_8^{\sqrt{3}} + \log_y^9 = 1 \Rightarrow \log_y^9 = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow y^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 9$$

$$\sqrt{y} = 9 \Rightarrow y = 81$$

۳۰- از دو معادله‌ی دومجهولی  $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$  و  $\log(x+2y) = 1 + \log y$  مقدار  $x$  کدام

است؟

(سراسری ۹۶)

$\log 10$

۱/۶ (۴)

۱/۵ (۳)

۱/۴ (۲)

۱/۲ (۱)

$$3^{2x+y} = 3^2 \times 3^{x-y} \Rightarrow 3^{2x+y} = 3^{x-y+2} \Rightarrow 2x+y = x-y+2$$

$$\log(x+2y) = \log 10 \Rightarrow x+2y = 10 \Rightarrow x+2y = 2$$

$$x = 2y$$

$$2y + 2y = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 1/2 \\ x = 1 \end{cases}$$

۳۱- اگر  $f(x) = 8 - 2^{2x-1}$  باشد و دامنه‌ی تابع  $y = \sqrt{(x+1)f(x)}$  بازه‌ی  $[a, b]$  باشد، مقدار  $b - a$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳) ✓

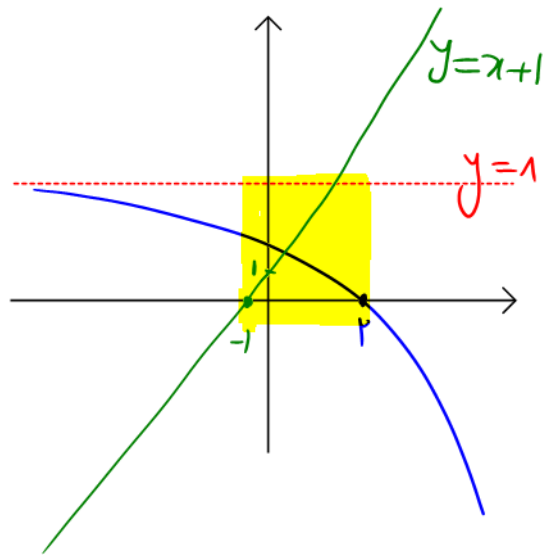
۲ (۲)

۱ (۱)

$$(x+1)(8-2^{2x-1}) \geq 0$$

$$8 - 2^{2x-1} = 0 \rightarrow 2^{2x-1} = 8 \rightarrow 2x-1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

$$D_f = [-1, 2]$$

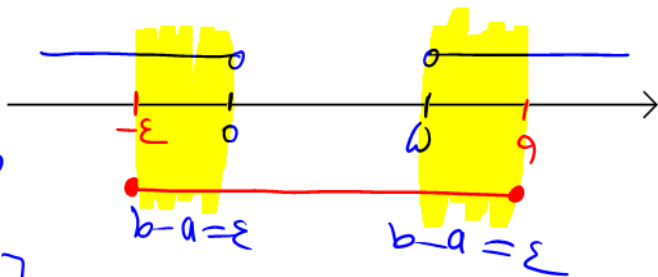


۴۵

۳۲- اگر برای هر  $x$  از بازه  $(a, b)$  تابع  $f(x) = \sqrt{2 - \log_6 x^2 - 5x}$  تعریف شده باشد، بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

$\log_6(x^2 - 5x) \leq 2$  (۴) ✓  $\rightarrow$   ~~$\log_6 x^2 - 5x \leq \log_6 9^2$~~  (۳)  $\rightarrow$   ~~$0 < x^2 - 5x \leq 36$~~  (۲)  $\rightarrow$   $0 < x^2 - 5x \leq 36$  (۱)

$$\begin{cases} x^2 - 5x > 0 \\ x^2 - 5x - 36 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-5) > 0 \\ (x-9)(x+4) \leq 0 \end{cases}$$



$$D_f = [-4, 0) \cup (5, 9]$$



۱۳۳- اگر  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$  و  $g(x) = 2^x + 1$  و دامنه‌ی تعریف تابع  $f \circ g^{-1}$  بازه‌ی  $(a, b)$  باشد،

مقدار  $b - a$  کدام است؟

۶ (۴)

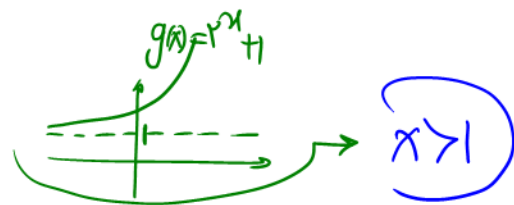
۷ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

$f \circ g^{-1}(x)$

$x \in D_{g^{-1}} = R_g$



$D_f : \begin{cases} 3 - x > 0 \\ x < 3 \end{cases}$

$g^{-1}(x) \in D_f : g^{-1}(x) < 3 \xrightarrow{\text{با استفاده از } g} g(g^{-1}(x)) < g(3) \Rightarrow x < 9$

$\underbrace{\hspace{10em}}_x \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{2^3 + 1}$

$\rightarrow D_{f \circ g^{-1}} = (1, 9)$

۴۷

۳۴- اگر  $f(x) = 2^{x+1} - 1$  باشد، ریشه‌ی معادله‌ی  $f^{-1}(x) + f^{-1}(x+2) = 2$  کدام است؟

$$\sqrt{17} - 2 \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$\sqrt{15} - 2 \quad (۳)$$

$$\sqrt{10} - 1 \quad (۲)$$

$$\sqrt{7} - 1 \quad (۱)$$

$$2^{x+1} - 1 = y \Rightarrow 2^{x+1} = y + 1 \Rightarrow x + 1 = \log_2^{y+1} \Rightarrow$$

$$x = \log_2^{y+1} - 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \log_2^{x+1} - 1$$

$$\left( \log_2^{x+1} - 1 \right) + \left( \log_2^{x+3} - 1 \right) = 2 \Rightarrow \log_2^{(x+1)(x+3)} = 4$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+3) = 2^2 \rightarrow x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{17}$$

۴۸

$$x = \sqrt{17} - 2$$

۳۵- تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = a - \log_3^{(b-x)}$  محورهای مختصات را در نقاطی با طول ۶ و عرض ۱-

قطع می‌کند. مقدار  $f^{-1}(-2)$  کدام است؟

-۳۶ (۴)

-۲۷ (۳)

-۱۸ (۲) ✓

-۱۲ (۱)

$$\begin{cases} f(4) = 0 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \log_3^{(b-4)} = 0 \\ a - \log_3^b = -1 \end{cases} \Rightarrow \log_3^b - \log_3^{b-4} = 1$$

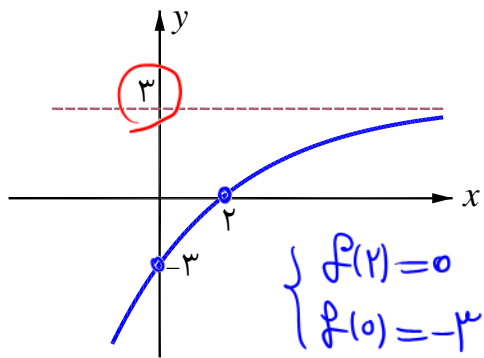
$$\log_3 \frac{b}{b-4} = 1 \rightarrow \frac{b}{b-4} = 3^1 \Rightarrow b = 3b - 12 \rightarrow b = 4 \Rightarrow$$

$$a - \log_3^4 = -1 \Rightarrow a - 2 = -1 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = 1 - \log_3^{(4-x)}$$

$$۴۹ \quad f^{-1}(-2) = x \Rightarrow f(x) = -2 \Rightarrow 1 - \log_3^{4-x} = -2 \Rightarrow \log_3^{4-x} = 3 \Rightarrow 4-x = 3^3 \Rightarrow x = -18$$

۱۳۶- شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $f(x) = a \cdot b^x + c$  است. مقدار  $f(\log_2^9)$  برابر کدام است؟



$$c=3$$

$$f(x) = a \cdot b^x + 3$$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab^2 + 3 = 0 \Rightarrow -4b^2 + 3 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{4} \\ ab^0 + 3 = -3 \Rightarrow a = -6 \end{cases}$$

$$b^2 = \frac{1}{4}$$

$$b = 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(\log_2^9) = -6 \times (2^{-\frac{1}{2}})^{\log_2^9} + 3$$

$$= -6 \times (2^{-\frac{1}{2}})^{\log_2^9} + 3 = -6 \times 2^{\log_2^9 \cdot (-\frac{1}{2})} + 3 = -6 \times 2^{-\frac{1}{2} \log_2^9} + 3 = -6 \times 9^{-\frac{1}{2}} + 3$$

$$= -6 \times \frac{1}{\sqrt{9}} + 3 = -\frac{6}{3} + 3 = 1$$

۵۰

$$1/25 \quad (2)$$

$$1/75 \quad (4)$$

$$1 \quad (1) \quad \checkmark$$

$$1/5 \quad (3)$$

۳۷- شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $f(x) = \log_c^{ax+b}$  است. طول نقطه‌ی تقاطع نمودار این تابع با

$$ax+b=0 \xrightarrow{x=-r}$$

خط  $y=-1$  کدام است؟

$$-ra+b=0 \rightarrow b=ra$$

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

۲/۵ (۴) ✓

۳ (۳)

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

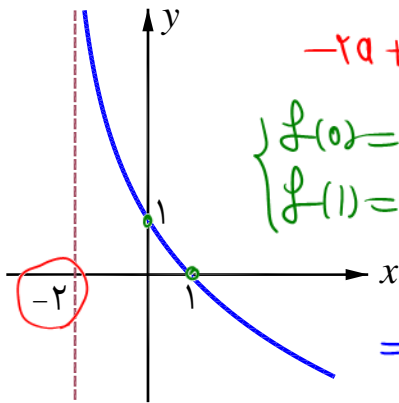
$$\rightarrow \begin{cases} \log_c^b = 1 \\ \log_c^{a+b} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow b=c^1$$

$$\rightarrow a+b=c^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=c \\ a+b=1 \\ \quad \quad \quad | \\ \quad \quad \quad ra \end{cases}$$

$$\Rightarrow ra=1 \rightarrow a=\frac{1}{r}, b=\frac{r}{r}, c=\frac{r}{r}$$



$$f(x) = \log_{\frac{r}{r}}^{\frac{1}{r}x + \frac{r}{r}}$$

$$= -1 \Rightarrow \frac{1}{r}x + \frac{r}{r} = \left(\frac{r}{r}\right)^{-1} \Rightarrow \frac{x+r}{r} = \frac{r}{r} \rightarrow$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{x = \frac{r}{r}}$$

۵۱

۳۸- می‌دانیم که اگر فشار هوا در ارتفاع  $a$  متری از سطح دریا برابر  $p$  باشد،

$a = 15500(5 - \log p)$  است. برای اینکه فشار هوا ۲۵٪ کاهش یابد، چند متر باید افزایش ارتفاع

داشته باشیم؟ ( $\log 2 = 0,3$  ،  $\log 3 = 0,48$ )

۱۹۰۰ (۴)

۱۸۶۰ (۳) ✓

۱۸۲۰ (۲)

۱۷۴۰ (۱)

$$P_2 = (1 - 0,25) P_1 \rightarrow P_2 = \frac{3}{4} P_1 \rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{3}$$

$$a_1 = 15500(5 - \log P_1) \rightarrow a_2 - a_1 = 15500(-\log P_2 + \log P_1)$$

$$a_2 = 15500(5 - \log P_2)$$

$$a_2 - a_1 = 15500 \times \log \frac{P_1}{P_2} = 15500 \log \frac{4}{3} = 15500(2 \log 2 - \log 3)$$

$$\approx 15500(2 \times 0,3 - 0,48) = 15500 \times 0,12 = 155 \times 12 = 1860$$

۵۲

۳۹- پس از مصرف یک دارو، در هر ساعت ۱۰٪ از مقدار داروی موجود در بدن، دفع می‌شود. چند

ساعت پس از مصرف بیش از ۹۸ درصد از مقدار اولیه این دارو دفع شده است؟

$$(\log 2 = 0,301, \log 3 = 0,477)$$

۳۹ (۴)

۳۷ (۳) ✓

۳۵ (۲)

۳۳ (۱)

$$\begin{array}{r} 1499 \overline{) 46} \\ 121 \phantom{0} \\ \hline 219 \\ 222 \end{array}$$

$$1 - 0,1 = 0,9$$

$$0,9^n \approx 0,02 \rightarrow \log(0,9)^n = \log 0,02 \rightarrow$$

$$n \log \frac{9}{10} = \log \frac{2}{100} \rightarrow n(1 \log 9 - 1) = (\log 2 - 2) \rightarrow$$

$$n(0,954 - 1) = (0,301 - 2) \rightarrow n = \frac{1,499}{0,046} = \frac{1499}{46} \quad \checkmark \checkmark$$

۴۰- در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به جای آن آب

خالص اضافه می‌کنیم. پس از چند روز غلظت آن  $\frac{1}{3}$  غلظت اولیه می‌شود؟

( $\log 2 = 0,3$  ,  $\log 3 = 0,48$ )

(سراسری ریاضی خارج ۹۹)

۳۲ (۴)

۳۰ (۳)

۲۴ (۲) ✓

۲۰ (۱)

$$1 - 0,04 = 0,96$$

$$(0,96)^n = \frac{1}{3} \rightarrow$$

$$n \log 0,96 = \log \frac{1}{3} \rightarrow n (\log 96 - \log 100) = -\log 3$$

$$n = \frac{\log 3}{\log 100 - \log 96}$$

$$= \frac{\log 3}{2 - 2 \log 2 - \log 3} = \frac{0,48}{2 - 1,8 - 0,48} = \frac{0,48}{0,72}$$

$$= 24$$

۵۴