



کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

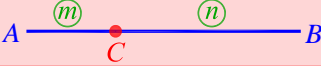
کنکور ۱۴۰۱

فصل هشتم : هندسه تحلیلی

مهرداد عباسپور

نقاط در دستگاه مختصات

| | |
|---|--|
| $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ | فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$: |
| $M = \frac{1}{2}(A + B)$ | نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB : |
| $A' = 2B - A$ | قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی B : |
| $O = \frac{1}{4}(A + C) = \frac{1}{4}(B + D)$ | شرط اینکه $ABCD$ متوازی‌الاضلاع به مرکز O باشد : |

| | |
|------------------------------|--|
| $C = \frac{mB + nA}{m + n}$ | نقطه‌ای روی پاره‌خط AB !  |
| $G = \frac{1}{3}(A + B + C)$ | محل برخورد میانه‌های مثلث ABC : |

مثال : نقاط $A(2, 0)$ و $B(5, -6)$ مفروض‌اند. نقطه‌ای روی پاره‌خط AB بیابید

که $MA = 2MB$ باشد.



روش پیدا کردن مساحت مثلث ABC :

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| A | B | C | A |
| x_1 | x_2 | x_3 | x_1 |
| y_1 | y_2 | y_3 | y_1 |

 $\Rightarrow S = \frac{1}{2} |(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_1 y_3 + x_3 y_2 + x_2 y_1)|$

مثال : مساحت مثلث با رئوس $A(2,1)$ ، $B(3,-1)$ و $C(5,7)$ ؟

همراستایی سه نقطه

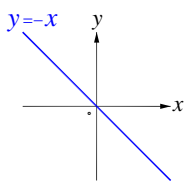
برای اینکه سه نقطه A ، B و C بر یک خط قرار بگیرند، کافی است شیب دو تا از خطوط AB ، AC و BC برابر باشد.

مثال : نقاط $A(2,1)$ ، $B(3,5)$ و $C(a,2a)$ روی یک خط هستند. a ؟

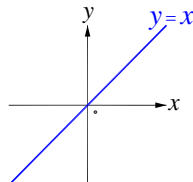
خط در دستگاه مختصات

| | |
|---|---|
| $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ | شیب خط گذرنده از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$: |
| $y - y_1 = m(x - x_1)$ | خط گذرنده از نقطه $A(x_1, y_1)$ با شیب m : |
| $m = m'$ | شرط موازی بودن دو خط با شیب های m و m' : |
| $mm' = -1$ | شرط عمود بودن دو خط با شیب های m و m' : |
| $y = mx + h$ | اگر در معادله ی خط y بر حسب x نوشته شود: ضریب x شیب خط است (m). عدد ثابت عرض از مبدأ (h). |

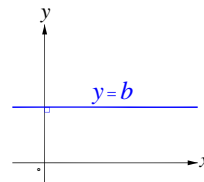
خط های خاص



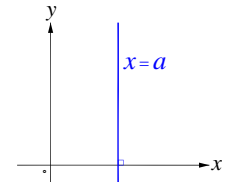
نیمساز ربع دوم و
چهارم



نیمساز ربع اول و
سوم



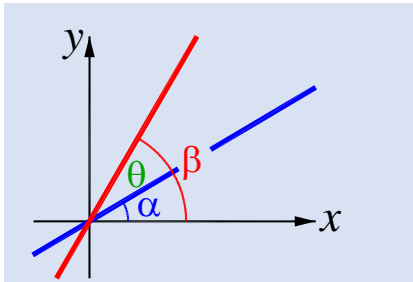
خط موازی محور x ها
شیب برابر صفر



خط موازی محور y ها
شیب تعریف نشده



زاویه بین خطوط



اگر شیب دو خط m و m' باشند و با جهت مثبت محور x زاویه‌های α و β بسازند و زاویه‌ی بین این دو خط θ باشد:

$$m = \tan \alpha \quad , \quad m' = \tan \beta$$

$$\theta = |\alpha - \beta| \Rightarrow |\tan \theta| = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$$

مثال: زاویه بین دو خط $x + y = 1$ و $x = \sqrt{3}y$

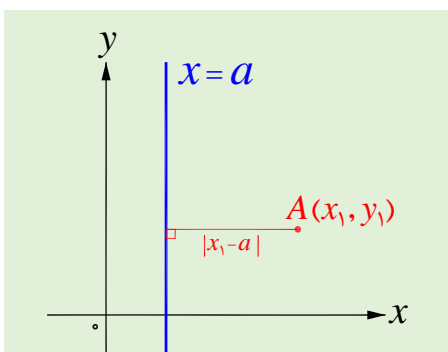
مثال: زاویه بین دو خط $x + y = 1$ و $y = 2x$

وضع نسبی دو خط

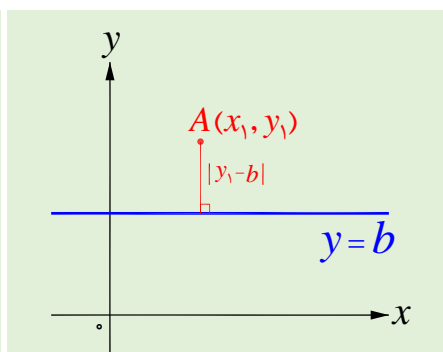
وضع دو خط به معادلات $L : ax + by = c$ و $L' : a'x + b'y = c'$:

| | | |
|---|--|-----------------|
| $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ | | متقاطع |
| $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ | | موازی غیر منطبق |
| $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ | | منطبق |

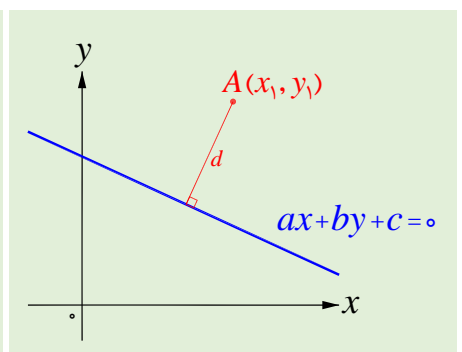
فاصله‌ی نقطه از خط:



$$d = |x_1 - a|$$



$$d = |y_1 - b|$$



$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



فاصله‌ی دو خط موازی، خط وسط آنها

| | |
|--|--|
| | <p>برای دو خط موازی $ax + by = c$ و $ax + by = c'$:</p> <p>فاصله‌ی دو خط موازی : $d = \frac{ c - c' }{\sqrt{a^2 + b^2}}$</p> <p>معادله‌ی خط وسط آنها : $ax + by = \frac{c + c'}{2}$</p> |
|--|--|

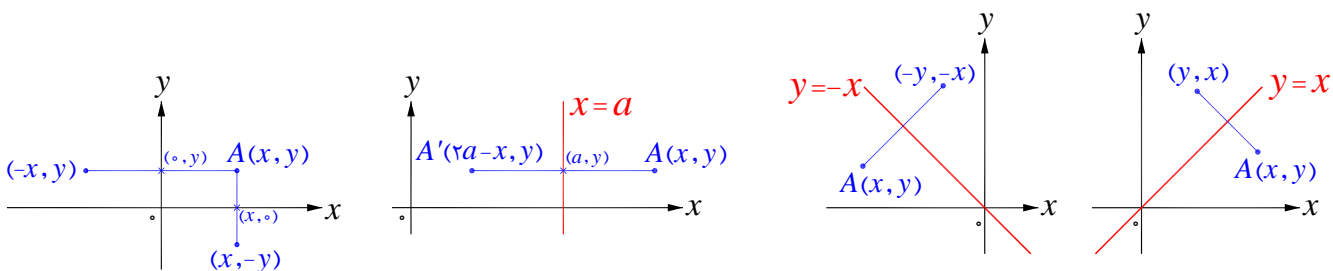
نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط متقاطع

کافی است، فاصله‌ی نقطه‌ی فرضی (x, y) روی نیمساز را تا دو خط داده شده برابر قرار دهیم.

مثال : نیمساز زاویه‌ی بین خطوط $y = x$ و $y = 7x$ ؟

قرینه‌ی نقاط نسبت به :

محورهای مختصات و خطوط موازی آنها، نیمساز ربع‌های مختصات



دسته خط

نقطه‌ی ثابت دسته خطوط $(m-1)x + (m-2)y = 2m+1$ را بیابید.

۱- نقاط $A(2,0)$ ، $B(5,0)$ و $C(5,-5)$ سه رأس یک مثلث‌اند. این مثلث چگونه است ؟

- ۱) متساوی‌الاضلاع است.
- ۲) متساوی‌الساقین است ولی قائم‌الزاویه نیست.
- ۳) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین
- ۴) قائم‌الزاویه است ولی متساوی‌الساقین نیست.



۲- مختصات سه تا از رئوس مستطیل $ABCD$ به صورت $A(2,3)$ ، $B(4,1)$ و $C(m,-1)$ است. طول نقطه‌ی D کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۳- اگر مساحت مثلث ABC که $A(1,2)$ ، $B(3,1)$ و $C(a,a+1)$ است، برابر ۶ باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۹ (۳) ۵ (۴) ۶

۴- اگر a عدد مثبت و نقاط $A(-1,a-1)$ ، $B(1,2a+1)$ و $C(a,7)$ روی یک خط راست باشند، این خط محور y ها را در کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵- سه خط به معادلات $y=2x+a$ ، $y=3x-a$ و $ax-2y+12=0$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. مجموع طول و عرض نقطه‌ی A کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۱ (۳) ۱۴ (۴) ۲۲

۶- دو خط $(m+1)x+5y=3m-2$ و $2x+(m-2)y=4$ بر هم منطبق هستند. عرض از مبدأ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{5}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $-\frac{4}{5}$

۷- زاویه‌ی بین دو خط $y=x+2$ و $\sqrt{3}x+y=1$ کدام است؟

- (۱) 15° (۲) 30° (۳) 60° (۴) 75°

۸- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2,4)$ نسبت به خطوط $y=x-2$ و $x=5$ را به ترتیب B و C می‌نامیم. مساحت مثلث ABC کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۹- در مربعی به مساحت ۲۰، معادله‌ی یکی از قطرهای $y=ax-1$ و مختصات یکی از رئوس غیر واقع بر این قطر، $A(4,1)$ است. مقدار مثبت a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵

۱۰- اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y+2x=16$ ، $2y-x=2$ و $y=0$ هستند. اندازه‌ی میانه‌ی نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه‌ی مختصات کدام است؟

(سراسری تهرنی فارج ۹۹)

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) ۵ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۶



۱۱- معادله قطرهای دایره‌ای به صورت $(m-2)x + (3-m)y = 2m+1$ هستند. این دایره از نقطه‌ی $A(1,2)$ می‌گذرد. خطی که در نقطه‌ی A بر دایره مماس است، محور y ها را در نقطه-ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

آزمون

۱۲- مربع $ABCD$ که در آن M وسط ضلع BC است، مفروض است.

اگر $A = (1,5)$ و $M = (4,4)$ باشد، مساحت این مربع چقدر است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)

۱۳- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، رأس A روی خط $y = 2x + 1$ ، و مرکز متوازی‌الاضلاع روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است. اگر $C(2,-1)$ و $D(5,1)$ باشند، مختصات رأس B کدام است؟

- ۱ (۱) $(-1,3)$ ۲ (۲) $(3,-1)$ ۳ (۳) $(1,3)$ ۴ (۴) $(3,1)$

۱۴- مساحت مثلثی که دو رأس آن نقطه‌ی تلاقی خط $2x + 3y = 12$ با محورهای مختصات، و رأس سوم آن روی نیمساز ربع دوم و چهارم است برابر ۱۴ است. طول رأس سوم مثلث کدام است؟

- ۱ (۱) $2, -24$ ۲ (۲) $4, -26$ ۳ (۳) $-4, 24$ ۴ (۴) $2, -26$

۱۵- یک خط از نقاط $A(1,a)$ ، $B(a,2)$ و $C(4,2a)$ می‌گذرد. مقدار مثبت a کدام است؟

- ۱ (۱) $48\sqrt{3}$ ۲ (۲) $\sqrt{7} - 1$ ۳ (۳) $\sqrt{5} + 1$ ۴ (۴) $\sqrt{5} - 1$

۱۶- معادلات سه ارتفاع یک مثلث به صورت $y = ax + 1$ ، $x + y = 7$ و $3x - y = a - 1$ هستند. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- ۱ (۱) -7 ۲ (۲) -5 ۳ (۳) 5 ۴ (۴) 7

۱۷- به ازای چه مقدار a دو خط $ax + 2y = 8$ و $8x + ay = a^2$ موازی و غیر منطبق‌اند؟

- ۱ (۱) ± 4 ۲ (۲) -4 ۳ (۳) 4 ۴ (۴) نشدنی

۱۸- یکی از خطوط نیمساز زاویه‌ی بین دو خط $3x - 4y = 14$ و $4x - 3y = 7$ موازی نیمساز ربع اول و سوم است. عرض از مبدأ آن کدام است؟

- ۱ (۱) 7 ۲ (۲) -7 ۳ (۳) 3 ۴ (۴) -3



۱۹- اگر A نقطه‌ای روی خط $y = 2x - 1$ باشد، که فاصله‌ی آن از خط $y = 7x + 4$ برابر $\sqrt{2}$ است، عرض نقطه‌ی A کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) -۷ (۲) -۶ (۳) -۵ (۴) -۴

۲۰- نقطه‌ی A از دو خط به معادلات $y = 2x + 5$ و $y = 2x + 1$ فاصله‌ی برابر دارد. با فرض $B = (5, 3)$ و $C = (1, 7)$ ، فاصله‌ی نقطه‌ی A تا نقاط B و C برابر است. مجموع طول و عرض نقطه‌ی A کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) صفر

۲۱- خطی با شیب m ، از نقطه‌ی $(2, -1)$ می‌گذرد و همراه با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۶ می‌سازد. بزرگترین مقدار m کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{2}$ (۲) $1 + \sqrt{3}$ (۳) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۲- معادلات دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع $y = x + 5$ و $x = 4$ هستند. مختصات یکی از رئوس این متوازی‌الاضلاع $A = (8, 1)$ است. مساحت این متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۶۰ (۴) ۷۲

۲۳- مثلثی با رأس‌های $A(1, 5)$ ، $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC ، کدام است؟

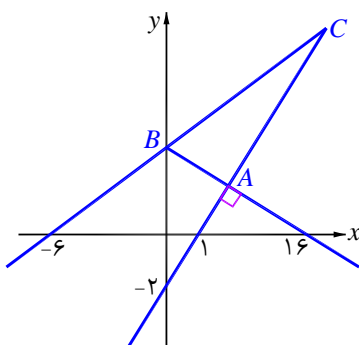
(سراسری تبریز ۹۹)

- (۱) ۴ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) ۵ (۴) $4\sqrt{2}$

۲۴- همهی خطوط با معادلات $(m-1)x + (2m+1)y = m+5$ از مرکز یک لوزی می‌گذرند. یکی از اضلاع این لوزی روی نیمساز ربع اول است. اگر محیط این لوزی برابر $12\sqrt{2}$ باشد، مساحت آن چقدر است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۵۰

۲۵- با توجه به شکل روبه‌رو، عرض از مبدأ ارتفاع رأس A از مثلث ABC کدام است؟



- (۱) ۹ (۲) ۱۰

- (۳) ۱۱ (۴) ۱۲