

# کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل نهم : تابع

مهر داد عباسپور

## مفاهیم اولیه‌ی تابع

### (۱) تشخیص تابع بودن :

برای هر  $x$  از دامنه‌ی تابع فقط یک  $y$  وجود دارد.

### (۲) توابع خاص :

تابع ثابت ( $f(x) = c$ ) ، تابع همانی ( $f(x) = x$ ) ، تابع خطی ( $f(x) = ax + b$ )

تابع چندجمله‌ای درجه  $n$  ( $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$ ) که  $a \neq 0$  ،

تابع گویا (تقسیم دو چندجمله‌ای)

$$1) x=0 \rightarrow \cos y = 1 \rightarrow y = 2k\pi$$

1- در کدام گزینه،  $y$  تابعی از  $x$  است؟

$$2) 2y^2 + 3y = x + 1 \xrightarrow{x=1} 2y^2 + 3y - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} y \text{ عددی}$$

$$\times \sqrt{\cos y} = 1 + x^2 \quad (1)$$

$$3) x=1 \rightarrow y^2 - 3y - 2 = 0 \rightarrow (y-2)(y+1)^2 = 0 \rightarrow y = 2 \text{ یا } -1$$

$$\times \frac{x+1}{2y+3} = y \quad (2)$$

$$4) x^2 + 4x + y^2 - 2y = -5 \rightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = -5$$

$$\times y^2 - 3y = x^2 + 1 \quad (3)$$

$$\rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 0 \rightarrow x+2=0, y=1$$

$$\checkmark x^2 + y^2 + 4x = 2y - 5 \quad (4)$$

$$\rightarrow f = \{(-2, 1)\}$$

$$\frac{2y+1}{2y-1} = 2^x + vx + 1 \quad \checkmark$$

نکته: اگر  $f$  تابع یک به یک باشد، رابطه  $f(y) = g(x)$  تابع است.

$$y^2 + 3y = x^2 + 1 \quad \checkmark$$

$$\left[ (y^2 + 3y)' = 2y + 3 > 0 \rightarrow \text{یک به یک و آید معکوس} \right]$$

$$y + \sqrt{y} = \sin x \quad \checkmark$$

$$y + \sqrt{y} \quad \text{معکوس آید}$$

$$y + [y] = \log x \quad \checkmark$$

$$y + [y] \quad //$$

۲- اگر  $f$  یک تابع خطی و  $g(x) = f(x+1) + f(x-2)$  تابع همانی باشد، عرض از مبدأ  $f$  کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

$$f(x) = ax + b$$

$$g(x) = x$$

$$x = a(x+1) + b + a(x-2) + b$$

$$x = 2ax + 2b - a$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - a = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

## دامنه‌ی تعریف تابع

(۱) شرایط لازم در توابعی که ما می‌شناسیم :

$$\frac{A}{B} : B \neq 0, \quad \sqrt[n]{A} : A \geq 0, \quad \log_B A : (A > 0, B > 0, B \neq 1)$$

(۲) مسائلی که می‌خواهیم دامنه‌ی تعریف یک تابع  $\mathbb{R}$  باشد.

(۳) تعیین دامنه‌ی توابع از روی نمودار

(۴) تساوی دو تابع (دامنه‌ها برابر برای هر  $x$  از دامنه مقادیر دو تابع برابر)

۳- دامنه‌ی تعریف تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + 5x + a}}{x^2 + ax + 7}$  ، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. برای  $a$  چند

مقدار صحیح وجود دارد؟



$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \rightarrow 40 - 25a^2 \leq 0 \xrightarrow{\wedge} a \geq \frac{4}{5}$$

$$\rightarrow \frac{4}{5} \leq a < \sqrt{11}$$

فرض کنیم  $\Delta < 0$  :

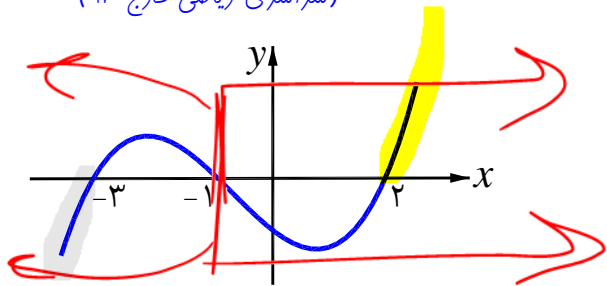
$$a^2 - 2a < 0 \rightarrow -\sqrt{11} < a < \sqrt{11}$$

$$a = 3, 4, 5$$

۴- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x)$  است. دامنه‌ی تابع غیرنقطه‌ای  $\sqrt{(x+1)f(x)}$ ، کدام

است؟

(سراسری ریاضی فارغ ۹۷)

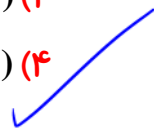


$[-1, +\infty)$  (۲)

$[-3, 2]$  (۱)

$\mathbb{R} - (-3, 2)$  (۴)

$(-\infty, -1]$  (۳)



$x+1 \geq 0, f(x) \geq 0$   
 $\hookrightarrow x \geq -1$

$x+1 \leq 0, f(x) \leq 0$   
 $\hookrightarrow x \leq -1$

$$D = (-\infty, -3] \cup \{-1\} \cup [2, +\infty)$$

$$= (\mathbb{R} - (-3, 2)) \cup \{-1\}$$

$$(1) D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(2) \sqrt{a^2} = |a| = |-a|$$

$$(3) f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}}$$

$$f(-1) = 0, \quad -1 \notin D_g$$

$$(4) D_g: \begin{cases} x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x \in (0, 1)$$

$$D_f: \frac{x}{1-x} > 0 \rightarrow x \in (0, 1)$$

۵- کدام دو تابع برابر نیستند؟

$$\checkmark g(x) = 2 \log x^2 \text{ و } f(x) = \log x^4 \quad (1)$$

$$\checkmark g(x) = |x-1| \text{ و } f(x) = \sqrt{(1-x)^2} \quad (2)$$

$$\times g(x) = \frac{|x+1|}{\sqrt{x}} \text{ و } f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x} + 2} \quad (3)$$

$$\checkmark g(x) = \log x - \log(1-x) \text{ و } f(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad (4)$$

^



## برد تابع

(۱) برد با توجه به نمودار

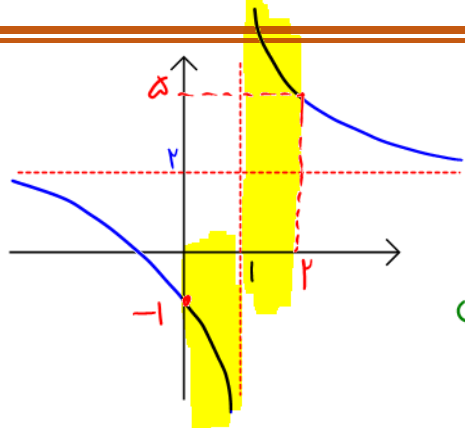
(۲) ساختن تابع از برد توابعی که می‌شناسیم.

(۳) برد تابع  $y = f(ax+b)$  با برد تابع  $y = f(x)$  یکسان است. ( $a \neq 0$ )

(۴) تغییر متغیر

(۵) برد توابع یکنوای اکید پیوسته

(۶) روش یافتن  $x$  بر حسب  $y$



مثال: برد تابع  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  ;  $0 < x < 2$

$$D_f = (0, 2) \rightarrow R_f = (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$$

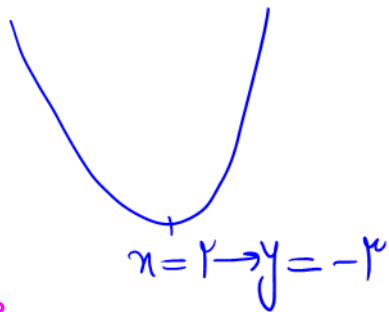
مثال  $R_f = \mathbb{R} - \{2\}$    
 وکل از فوار این محدوده برابر است

$$D_f = (2, 5) \xrightarrow{\text{بجای } x} f(2) = 5, f(5) = \frac{1}{4} \rightarrow R_f = (\frac{1}{4}, 5)$$

$$D_f = (-\infty, 1) \xrightarrow{\text{بجای } x} \begin{cases} f(-\infty) = 2 \\ f(1) = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases} \rightarrow R_f = (-\infty, 2)$$

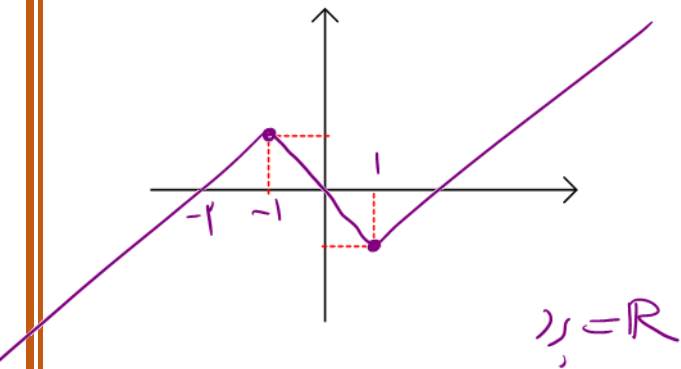
مثال: برد تابع  $y = x^2 - 4x + 1$

$$D_f = [-3, +\infty)$$



مثال:  $D_f = (0, 3)$    
 $y=1$    
 $x=3$    
 $y=-3$    
 $\Rightarrow [-3, 1)$

$$D_f = [3, 5) \xrightarrow{\text{بجای } x} \begin{cases} f(3) = -2 \\ f(5) = 4 \end{cases} \Rightarrow [-2, 4)$$



مثال: برد تابع  $y = x + |x-1| - |x+1|$

$$x=1 \rightarrow y=-1$$

$$x=-1 \rightarrow y=1$$

$$x > 1 : y = x + x - 1 - x - 1 = x - 2$$

$$x < -1 : y = -2 - y = 0$$

مثال: برد تابع  $y = \sqrt{9 - \sqrt{3x-1}}$

تبدیل  $ax+b$  به  $\sqrt{ax+b}$  در برد تابع  
 اندر نگذاشت

$$0 \leq \sqrt{x} < +\infty \rightarrow 0 \leq \sqrt{3x-1} < +\infty$$

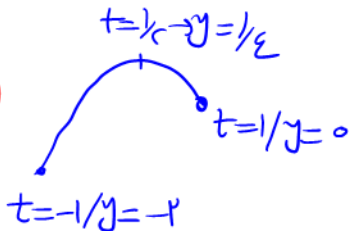
$$-\infty < -\sqrt{3x-1} \leq 0 \rightarrow -\infty < 9 - \sqrt{3x-1} \leq 9 \rightarrow 0 \leq \sqrt{9 - \sqrt{3x-1}} \leq 3$$

$$\rightarrow \text{برد} = [0, 3]$$

$$\sin x = t$$

$$y = t - t^2$$

$$-1 \leq t \leq 1$$



مثال: برد تابع  $y = \sin x - \sin^2 x$

$$D_y = \left[-\frac{2}{1}, \frac{1}{4}\right]$$

برای بررسی / بررسی  
 $y' = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0$

مثال: برد تابع  $y = 2x + \sqrt{x-2}$

هر تابع پیوسته گنونا با قرار دادن  
سویه نامنه فرد در است جوابی

$$D_f = [2, +\infty)$$

$$f(2) = 2 \quad \rightarrow \quad f(+\infty) = +\infty$$

$$D_y = [2, +\infty)$$



مثال: برد تابع  $y = \frac{x+1}{x^2+3}$

$$yx^2 + 3y = x + 1$$

$$yx^2 - x + 3y - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4y(3y - 1) \geq 0$$

$$12y^2 - 4y - 1 \leq 0 \rightarrow (4y + 1)(3y - 1) \leq 0 \rightarrow y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$$

بردارهای  $x$  جواب دهنده

۶- برد تابع  $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{6x - x^2}}$  بازه‌ی  $[a, b]$  است. مقدار  $b - a$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



$$6x - x^2 \leq 9$$

$$0 \leq \sqrt{6x - x^2} \leq 3$$

$$1 \leq \sqrt{4 - \sqrt{6x - x^2}} \leq 2$$

$$1 \leq \sqrt{2 - \sqrt{6x - x^2}} \leq 2$$

$$D_f = [1, 2]$$

۷- اگر  $f(x) = 2 - |x - 1|$  و  $g(x) = x + |x|$ ، آنگاه برد تابع  $(\frac{f}{g})(x)$ ، کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج ۹۷)

(۱)  $(-\infty, \frac{1}{2})$

(۲)  $(-1, +\infty)$

(۳)  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$  ✓

(۴)  $(0, +\infty)$

$$y = \frac{2 - |x - 1|}{x + |x|}$$

$x < 0 \rightarrow$  غرض = 0

$x > 0 :$   $y = \frac{2 - |x - 1|}{2x}$

$0 < x < 1$   $y = \frac{x + 1}{2x}$

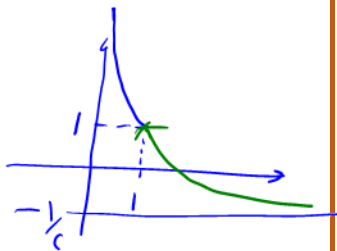
$x \geq 1$   $y = \frac{2 - x}{2x}$

$x \rightarrow 0^+ ; y \rightarrow +\infty$

$x = 1 ; y = 1$

$x = 1 ; y = 1$

$x \rightarrow +\infty ; y = -\frac{1}{2}$



۸- مجموعه اعضای برد تابع  $f(x) = [4x + 1] - 4[x]$  برابر کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

$$f(x) = [4x + 1 - 4[x]] = [4(x - [x]) + 1] = 1, 2, 3, 4$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{0 \leq \qquad < 4}$   
 $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{1 \leq \qquad < 5}$

$$\text{برد} = \{1, 2, 3, 4\}$$



## اعمال بین توابع

مثال: در هر حالت از سه تابع  $f$ ،  $g$  و  $f \circ g$  دو تا معلوم است. سومی را بیابید.

$$f(x) = x^2 + x, g(x) = 2x + 3$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x+3) = (2x+3)^2 + (2x+3)$$

$$f(x) = x^2 + 1, f \circ g(x) = 4x + 2$$

$$f(g(x)) = 4x + 2 \rightarrow (g(x))^2 + 1 = 4x + 2 \rightarrow g(x) = \sqrt{4x + 1}$$

$$g(x) = 3x + 1, f \circ g(x) = x^2$$

$$f(g(x)) = x^2 \rightarrow f(3x+1) = x^2 \quad \begin{cases} 3x+1 = t \rightarrow x = \frac{t-1}{3} \\ x^2 = ? = \left(\frac{t-1}{3}\right)^2 \end{cases} \quad f(t) = \left(\frac{t-1}{3}\right)^2$$

## ریشه‌های $f \circ g$

مثال: با فرض  $f(x) = x^2 - 8x + 15$  و  $g(x) = 2\sqrt{x} + 1$  ریشه‌های  $f \circ g$  را بیابید.

$$f(g(x)) = 0 \quad f(a) = 0 \rightarrow a^2 - 8a + 15 = 0 \quad a = 3, 5$$

$$g(x) = 3, 5$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + 1 = 3 \\ 2\sqrt{x} + 1 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

مثال : با توجه به اینکه  $x+2 \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x^3$ ، اگر  $g(x) = 3x+1$  باشد،  $f(7)$  ؟

$$g(f(x+2)) = x^3$$

$$3f(x+2)+1 = x^3 \xrightarrow[\lambda=\Delta]{x+2=\nu} 3f(\nu)+1 = 128$$

$$f(\nu) = \frac{127}{3} = 42\frac{1}{3}$$

۹- اگر  $f(x) = 2x - 1$  و  $gof(x) = 4x^2 - 8x$  باشد، نمودار تابع  $fog$ ، نیمساز ربع اول را در نقطه‌ی

با کدام طول قطع می‌کند؟

۳/۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

$$g(2x-1) = 4x^2 - 8x$$

$$2x-1=t \quad x=\frac{t+1}{2} \quad g(t) = 4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{t+1}{2}\right) = t^2 + 4t + 4 - 4t - 4 = t^2$$

$$g(t) = t^2$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2(x^2) - 1 = 2x^2 - 1$$

۲۰.  $2x^2 - 1 = x \rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = -1, \frac{1}{2}$

۱۰- اگر  $f(x+2\sqrt{x}) = x^2 - 6x$  باشد، مقدار  $f(1)$  کدام است؟

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$x + 2\sqrt{x} = 1 \rightarrow 2\sqrt{x} = 1 - x \xrightarrow{1-x \geq 0} 4x = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x^2 - 4x = -1$$

$$f(1) = -1$$

۱۱- اگر  $f(x) = x^3 - x$  و  $g(x) = x^2 - x$  ، تابع  $f \circ g$  در چند نقطه محور  $x$  ها را قطع می کند ؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

$$f(g(x)) = 0 \rightarrow a^3 - a = 0 \rightarrow a = 0, 1, -1$$

$$\begin{cases} x^2 - x = 0 & x = 0, 1 \\ x^2 - x = 1 & x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x^2 - x = -1 & \Delta < 0 \quad \times \end{cases}$$

## تعیین دامنه و برد تابع $f \circ g$

مثال: اگر  $f(x) = \sqrt{2x-1} + 2$  و  $g(x) = \sqrt{6-x}$  باشد، دامنه‌ی تعریف  $g \circ f$  را بیابید.



$$x \leq 4$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

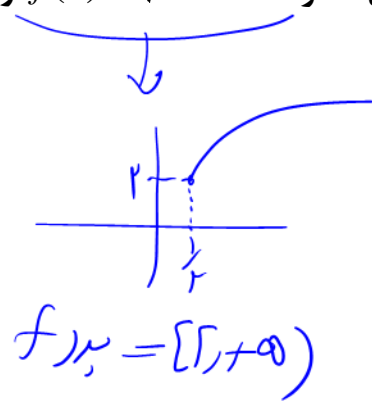
$$x \in D_f \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$f(x) \in D_g \rightarrow f(x) \leq 4 \rightarrow \sqrt{2x-1} + 2 \leq 4 \rightarrow \sqrt{2x-1} \leq 2 \rightarrow 2x-1 \leq 4$$
$$x \leq \frac{5}{2}$$

$$\rightarrow D_{g \circ f} = \left[ \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right]$$

مثال: اگر  $f(x) = \sqrt{2x-1} + 2$  و  $g(x) = \sqrt{6-x}$  باشد، برد  $g \circ f$  را بیابید.

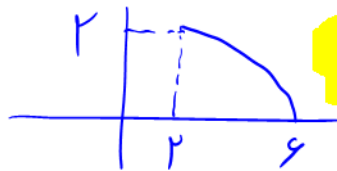
برد  $g \circ f$  = برد  $f$  است و وقتی  $f$  در دامنه  $g$  قرار می‌گیرد  
 نمودار برد  $f$  را بنویس



$$g(x) = \sqrt{6-x} \quad x \geq 2$$

البره / بنویس / بگو /  
 تقریبی

دامنه  $[2, 6]$   
 $\leftarrow$   $\rightarrow$



برد =  $[0, 2]$



۱۲- اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$  و  $g(x) = \frac{2x+1}{x+2}$  باشد، در دامنه‌ی تعریف تابع  $f \circ g$  چند عدد

صحیح وجود دارد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴) صفر

$$x \in D_g \rightarrow x \neq -2$$

$$x^2 - 4x - 5 \geq 0$$

$$y(x) \in D_f \rightarrow \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2} \leq -1 \\ \frac{2x+1}{x+2} \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{3x+3}{x+2} \leq 0 \\ -\frac{3x-9}{x+2} \geq 0 \end{cases}$$

$$x \leq -1 \quad x \geq 3$$



$$\xrightarrow{\cup} D_{f \circ g} = [-3, -1] - \{-2\}$$

۲۵

۱۳- اگر  $f(x) = [x] - x$  و  $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$  باشند، برد تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟

(سراسری تهرانی فارغ ۹۹)

(۲)  $(-1, 1]$

(۱)  $[-1, 1)$

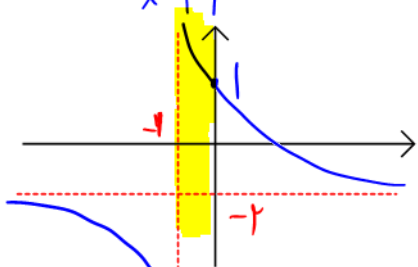
(۴)  $(-\infty, 1]$

(۳)  $[1, +\infty)$

$$0 \leq \{x\} < 1 \rightarrow -1 < [x] \leq 0$$

$$g(x) = \frac{1-2x}{x+1} \quad -1 < x \leq 0$$

$$\begin{cases} x \rightarrow -1^+; \frac{y}{x} = +\infty \\ x = 0 \rightarrow 1 \end{cases}$$

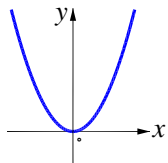


$$[1, +\infty)$$

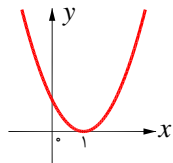
۲۶

# تبدیل نمودارها

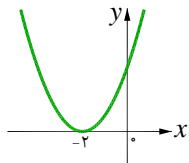
## (۱) انتقال افقی و عمودی



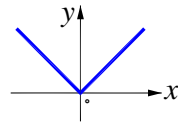
$$y = x^2$$



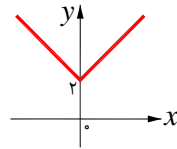
$$y = (x-1)^2$$



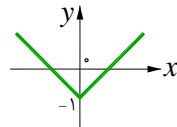
$$y = (x+2)^2$$



$$y = |x|$$

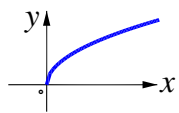


$$y = |x| + 2$$

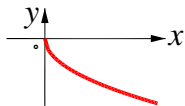


$$y = |x| - 1$$

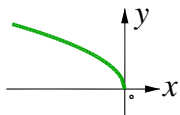
(۲) بازتاب نسبت به محور  $x$  و  $y$  :



$$y = \sqrt{x}$$

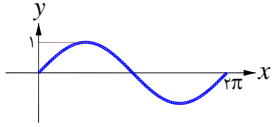


$$y = -\sqrt{x}$$

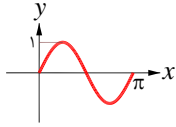


$$y = \sqrt{-x}$$

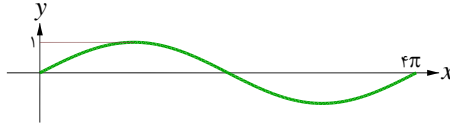
### (۳) انبساط و انقباض افقی و عمودی :



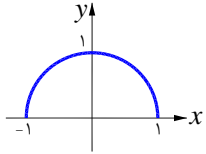
$$y = \sin x$$



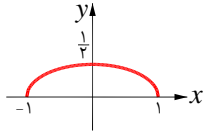
$$y = \text{Sh}(\pi x)$$



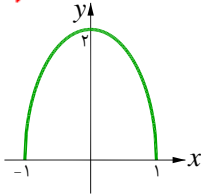
$$y = \text{Sh}\left(\frac{x}{2}\right)$$



$$y = \sqrt{1-x^2}$$



$$y = \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2}$$



$$y = 2\sqrt{1-x^2}$$

## (۴) به دو روش تبدیل $ax+b$ به $x$ دقت کنید.

مثال : می‌خواهیم از روی نمودار  $y = f(x)$  ، نمودار تابع  $y = f(2x-4)$  را رسم کنیم.

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{مطابقت}]{x \rightarrow x-4} y = f(x-4) \xrightarrow[\text{تغییر}]{x \rightarrow 2x} y = f(2x-4)$$

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{تغییر}]{x \rightarrow 2x} y = f(x) \xrightarrow[\text{مطابقت}]{x \rightarrow x-2} y = f(2(x-2))$$

## اثر تبدیل‌ها بر ضابطه‌ی تابع

مثال: اگر نمودار تابع  $y = x^2 - x$  را به ترتیب، ۲ واحد منتقل به چپ، بازتاب نسبت به محور  $x$ ، انبساط افقی با ضریب ۲، ۳ واحد به بالا منتقل کنیم، ضابطه‌ی تابع جدید را بیابید.

$$y = x^2 - x \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda + 2} y = (\lambda + 2)^2 - (\lambda + 2) \quad ; \quad y = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$\xrightarrow{-y} y = -\lambda^2 + 3\lambda - 2 \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x}{2}} y = -\frac{\lambda^2}{2} - \frac{3\lambda}{2} - 2$$

$$\xrightarrow{+3} y = -\frac{\lambda^2}{2} - \frac{3\lambda}{2} + 1$$

## یافتن نقطه‌ی متناظر روی نمودار تبدیل یافته

مثال: اگر نقطه‌ی  $A(2,3)$  روی تابع  $y = f(2x+1) - 3$  باشد، نقطه‌ی متناظر بر نمودار  $y = 2f(3-x)$  را بیابید.

$$A(2,3) \in y = f(2x+1) - 3 \rightarrow 3 = f(5) - 3$$
$$\rightarrow f(5) = 6$$

$$y = 2f(3-x) \rightarrow y = 2f(5) = 12$$
$$3-x=5 \rightarrow x=-2$$
$$A'(-2, 12)$$



## اثر تبدیل‌ها بر دامنه‌ی تابع

مثال: اگر دامنه‌ی تعریف تابع  $y = 3f(3x-1) + 1$  بازه‌ی  $(1, 2]$  باشد، دامنه‌ی تعریف

تابع  $y = 1 - 2f(4-2x)$  را بیابید.

$$\rightarrow 1 < x \leq 2 \rightarrow 2 < 3x-1 \leq 5 \rightarrow D_f = (2, 5]$$

$$f(4-2x) : 2 < 4-2x \leq 5 \rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \leq x < 1}$$

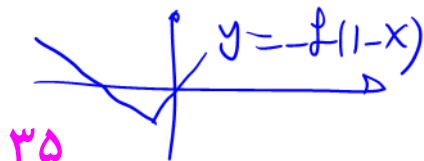
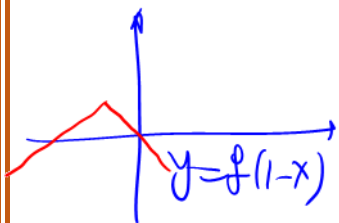
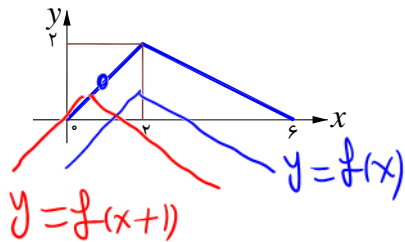
## اثر تبدیلهای بر برد تابع

مثال: اگر برد تابع  $y = 2f(1-x) + 1$  بازه  $(-\infty, 5)$  باشد، برد تابع  $y = 3 - f(2x+3)$  را بیابید.

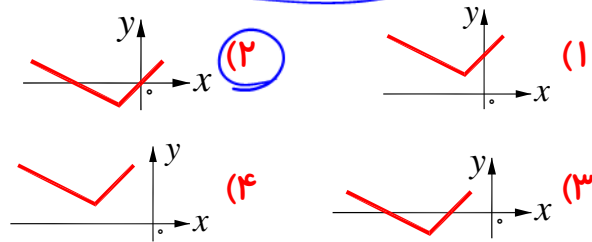
$$2f+1 < 5 \rightarrow 2f < 4 \rightarrow f < 2$$

$$-f > -2 \rightarrow 3-f > 1 \rightarrow y > 1$$

۱۴- اگر نمودار تابع  $y = f(x) + 1$  شکل زیر باشد، نمودار تابع  $y = -f(1-x)$  شبیه کدام است ؟



۳۵



$$(1, 1) \quad y = f(x) + 1$$

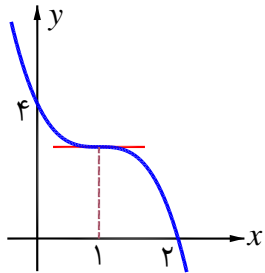
$$1 = f(1) + 1 \rightarrow f(1) = 0$$

$$y = -f(1-x)$$

$$1-x=1 \rightarrow x=0 \rightarrow (0, 0)$$

$$y = -f(1) = 0$$

۱۵- شکل مقابل نمودار تبدیل یافته‌ی تابع  $y = x^3$  است، مقدار این تابع به ازای  $x = 3$  کدام است؟



$$y = a(x-1)^3 + b$$

$$\begin{aligned} (2, 0) &\rightarrow 0 = a + b \\ (0, 2) &\rightarrow 2 = -a + b \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} b = 2 \\ a = -2 \end{array} \right.$$

$$y = -2(x-1)^3 + 2 \quad x = 3 \rightarrow y = -14$$

$$-16 \quad (2)$$

$$-14 \quad (1) \quad \checkmark$$

$$-24 \quad (4)$$

$$-20 \quad (3)$$

۱۶- نمودار تابع  $y = -x^2 + 2x + 5$  را ۳ واحد به طرف  $x$  های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف  $y$  های

منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

(سراسری ریاضی ۹۸)

(۲, ۵) (۲)

(۳, ۴) (۱) ✓

(۲, ۶) (۴)

(۳, ۵) (۳)

$$\left( -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 \right) - 2 > x$$

$$-x^2 + 8x - 12 > x$$

$$x^2 - 7x + 12 < 0 \rightarrow 3 < x < 4$$

۱۷- اگر دامنه‌ی تعریف تابع  $y = f(x+1)$  بازه‌ی  $[-2, 2]$  باشد، دامنه‌ی تعریف تابع

$y = f(2-x) + f\left(\frac{x}{5}\right)$  کدام است؟

$\left[1, \frac{5}{4}\right]$  (۴)

$\left[1, \frac{4}{5}\right]$  (۳)

$\left[-1, \frac{15}{4}\right]$  (۲) ✓

$\left[-1, \frac{12}{5}\right]$  (۱)

$$-3 \leq x \leq 2 \rightarrow -2 \leq x+1 \leq 3 \quad D_f = [-2, 2]$$

$$\begin{cases} -2 \leq 2-x \leq 3 \\ -2 \leq \frac{x}{5} \leq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ -10 \leq x \leq 15 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \left[-1, \frac{15}{4}\right]$$

۱۸- اگر رأس سهمی  $A(0, 3)$  باشد، رأس سهمی  $y = f(1 - \frac{1}{4}x)$  کدام است؟

(۴)  $(-2, -1)$

(۳)  $(-2, -5)$

(۲)  $(-1, -1)$

(۱)  $(-1, -5)$

$3 = f(1)$

$-x = 1 \rightarrow x = -1$

$y = 1 - 2f(1) = 1 - 6 = -5$

$(-1, -5)$

## توابع یکنوا و یک به یک

برای اعداد  $a$  و  $b$  در دامنه‌ی تعریف تابع :

$a > b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$	تعریف تابع صعودی
$a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$	تعریف تابع اکیداً صعودی
$a > b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$	تعریف تابع نزولی
$a > b \Rightarrow f(a) < f(b)$	تعریف تابع اکیداً نزولی

توابع یک به یک  $\Rightarrow$  اکیداً یکنوا

**تابع یک به یک :**

تابعی که هیچ دو نقطه‌ای از آن عرض برابر نداشته باشند.



## دقت کنید!

تابع  $f$  اکیداً صعودی ،  $f(a) > f(b) \Rightarrow a > b$

تابع  $f$  اکیداً صعودی ،  $f(a) \geq f(b) \Rightarrow a \geq b$

تابع  $f$  اکیداً نزولی ،  $f(a) > f(b) \Rightarrow a < b$

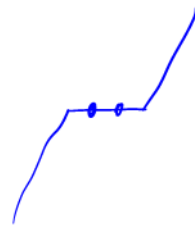
تابع  $f$  اکیداً نزولی ،  $f(a) \geq f(b) \Rightarrow a \leq b$

تابع  $f$  صعودی ،  $f(a) > f(b) \Rightarrow a > b$

تابع  $f$  صعودی ،  $f(a) \geq f(b) \Rightarrow X$

تابع  $f$  نزولی ،  $f(a) > f(b) \Rightarrow a < b$

تابع  $f$  نزولی ،  $f(a) \geq f(b) \Rightarrow X$



## اعمال روی توابع یکنوا

اکیداً صعودی + اکیداً صعودی  $\rightarrow$  اکیداً صعودی

اکیداً نزولی + اکیداً نزولی  $\rightarrow$  اکیداً نزولی

$f \circ g$	اکیداً صعودی	اکیداً نزولی
اکیداً صعودی	ص	ن
اکیداً نزولی	ن	ص

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\sqrt{x}} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x \\ h(x) = -\sqrt{x} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{ن} \\ \text{ص} \end{array} \rightarrow f = g \circ h \quad \text{ص}$$

۱۹- تابع  $f(x) = 2|x+1| - |x|$  در بازه‌ی  $[a, +\infty)$  اکیداً یکنواست. وضعیت یکنوایی  $f$  در این بازه و

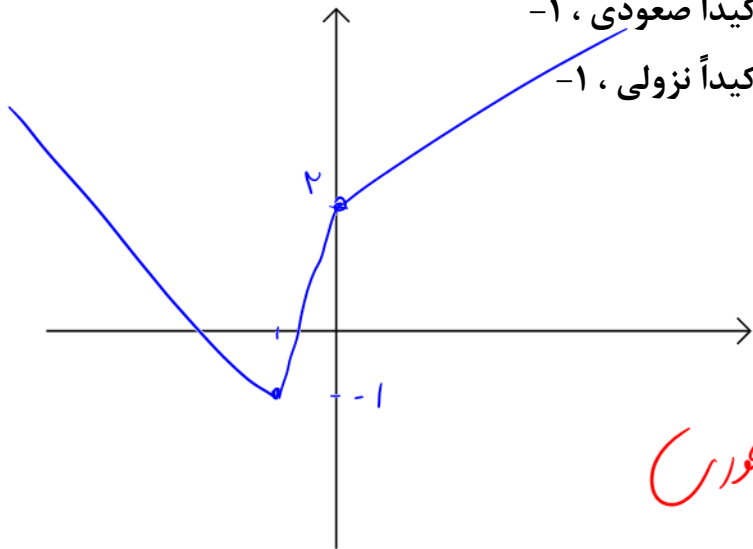
کمترین مقدار  $a$  کدام است؟

(۱) اکیداً صعودی، صفر

(۳) اکیداً نزولی، صفر

(۲) اکیداً صعودی، -۱

(۴) اکیداً نزولی، -۱



$$x > -1 : y = x + 2$$

$$x < -1 : y = -x - 2$$

→  $[-1, +\infty)$  اکیداً صعودی

۲۰- اگر  $f$  تابع اکیداً نزولی با دامنه  $[1, 9]$  باشد و دامنه  $y = \sqrt{f(2x-3) - f(x+2)}$  بازه  $[a, b]$  باشد، مقدار  $b - a$  برابر کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

$$2x-3 \in D_f \rightarrow 1 \leq 2x-3 \leq 9 \rightarrow 2 \leq x \leq 6$$

$$x+2 \in D_f \rightarrow 1 \leq x+2 \leq 9 \rightarrow -1 \leq x \leq 7$$

~~$$f(2x-3) \geq f(x+2) \xrightarrow{\text{و.ا.ف}} 2x-3 \leq x+2 \rightarrow x \leq 5$$~~

$$\rightarrow D = [2, 5]$$

(سراسری ریاضی ۹۷)

$$p(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad (۴)$$

$$h(x) = 2x + \frac{1}{x} \quad (۳)$$

۲۱- کدام یک از تابع های زیر، یک به یک است؟

$$g(x) = x - \sqrt{x} \quad (۲) \quad f(x) = x + \sqrt{x} \quad (۱)$$

$$y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

صعود کننده  
تصویب

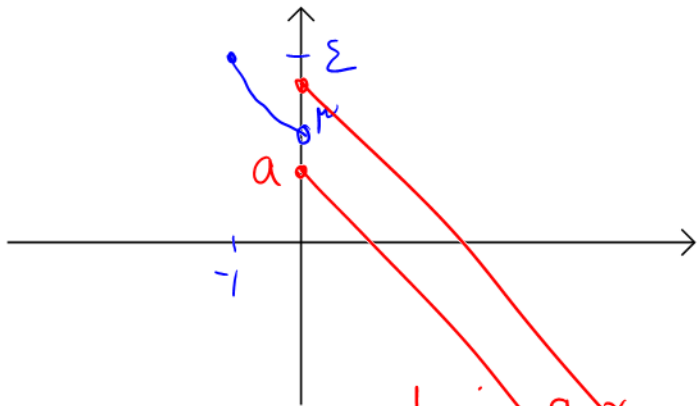
۲۲- تابع  $f(x) = \begin{cases} 4 - \sqrt{x+1} & x < 0 \\ a - x & x \geq 0 \end{cases}$  یکنواست. چند مقدار طبیعی برای  $a$  وجود دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

(۱) بی شمار



$$a \leq 3$$

خوب!  $a - x$

عند  $x=0$  متصل

## وارون تابع

مفهوم وارون تابع :

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

شرط وارون پذیری :

وارون تابع  $f$  در صورتی تابع است که  $f$  یک به یک باشد.

ضابطه‌ی تابع وارون :

با توجه به اینکه :  $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$  ، برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون  $f$  کافی است از

رابطه‌ی  $y = f(x)$  ،  $x$  را بر حسب  $y$  بیابیم.



## وارون تابع هموگرافیک :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+8} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-8x+1}{x-2}$$

**نکته !!**

در تست اگر در چهار گزینه، ضابطه برای وارون تابع داده است، می‌توانید با آزمایش کردن یک نقطه برخی گزینه‌ها را رد کنید.

## دامنه و برد تابع وارون

$$f^{-1} \text{ دامنه‌ی } f = \text{برد } f^{-1}, \quad f^{-1} \text{ برد } f = \text{دامنه‌ی } f$$

## نمودار وارون تابع

نمودار توابع  $f$  و  $f^{-1}$  نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند.

## ترکیب تابع با وارون آن

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) = x; x \in (\text{دامنه‌ی تعریف } f)$$

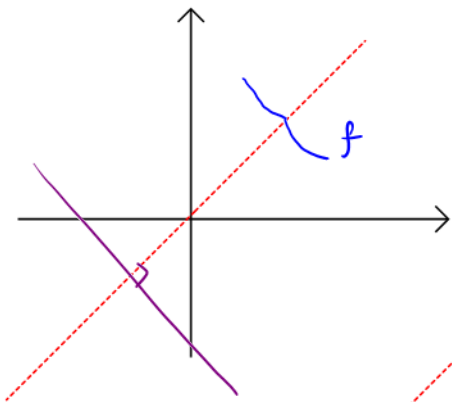
$$f(f^{-1}(x)) = f \circ f^{-1}(x) = x; x \in (\text{دامنه‌ی } f^{-1}) = (\text{بردار } f)$$

## وارون ترکیب دو تابع :

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

## وارون چه توابعی بر خودشان منطبق اند؟

از نظر هندسی هر تابعی که نیمساز ربع اول و سوم محور تقارن نمودار آن باشد.



توابع خطی:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \\ f(x) = -x + b \end{array} \right.$$

تابع هموگرافیک:

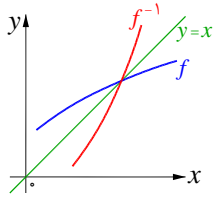
$$f(x) = \frac{cx - 1}{x - 2}$$

خط مشرف  $x = 2$   
خط مشرف  $y = 1$

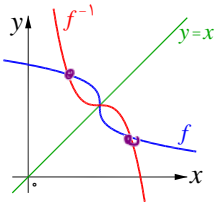
$$\left( f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad f = f^{-1} \Leftrightarrow a + d = 0 \right)$$

## تلاقی تابع با وارونش :

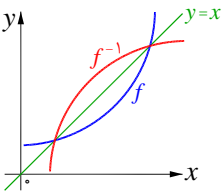
(الف) اگر نمودار تابع  $f$  نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را در نقطه‌ای قطع کند، نمودار  $f^{-1}$  نیز از این نقطه می‌گذرد.



(ب) نمودار تابع  $f$  و  $f^{-1}$  ممکن است در نقاطی خارج از نیمساز ربع اول و سوم نیز یکدیگر را قطع کنند.



(پ) اگر  $f$  یک تابع اکیداً صعودی باشد، در صورتی که  $f$  و  $f^{-1}$  در نقاطی همدیگر را قطع کنند، این نقاط حتماً روی نیمساز ربع اول و سوم است. پس در این حالت برای یافتن نقاط تقاطع  $f$  و  $f^{-1}$  کافی است  $f$  را با نیمساز ربع اول و سوم قطع دهیم.



## تلاقی وارون‌های دو تابع :

مثال: اگر  $f(x) = x + \sqrt{2x-1}$  و  $g(x) = 2x-11$  باشد، نقطه‌ی تلاقی  $f^{-1}$  و  $g$  را بیابید.

$$(f^{-1}, g) \rightarrow A = (\alpha, \beta) ?$$

$$(f, g^{-1}) \rightarrow A' = (\beta, \alpha)$$

$$y = 2x - 11 \rightarrow x = \frac{y+11}{2}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x+11}{2}$$

$$x + \sqrt{2x-1} = \frac{x+11}{2}$$

$$\sqrt{2x-1} = \frac{11-x}{2} \xrightarrow{\text{مربع}} x=8$$

$$A'(8, 1) \rightarrow A(1, 0)$$

۲۳- اگر  $g(x)$  وارون تابع  $f(x) = x + \sqrt{x}$  باشد، مقدار  $g(6) + g(12)$  کدام است؟

(سراسری تیربی ۹۹)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

$$f^{-1}(6) = x \rightarrow f(x) = 6 \rightarrow x + \sqrt{x} = 6 \rightarrow x = 9$$

$$f^{-1}(12) = x \rightarrow f(x) = 12 \rightarrow x + \sqrt{x} = 12 \rightarrow x = 9$$

$$9 + 9 = 18$$

۲۴- وارون تابع  $y = 8x - 4x^2$  در بخش نزولی نمودار آن، به صورت  $y = a + b\sqrt{c-x}$  است.

$$1 \frac{1}{4} \epsilon$$

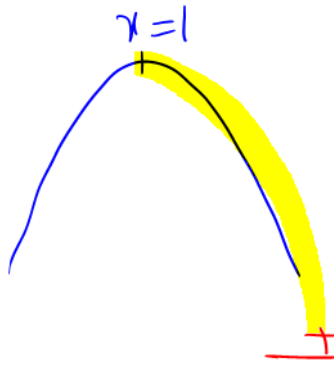
مقدار  $a + bc$  کدام است؟

$$-3 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$



$$y = 8x - 4x^2 \quad x \geq 1$$

$$x^2 - 2x = -\frac{1}{4}y$$

$$(x-1)^2 = 1 - \frac{y}{4}$$

همه رو بیضرب ۲ بدست می آید

مربع ۶ می کشد

$$|x-1| = \sqrt{\frac{4-y}{4}} \quad x \geq 1 \rightarrow x-1 = \frac{1}{2}\sqrt{4-y}$$

$$55 \quad x = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4-y}$$

$$f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4-x}$$

۲۵- اگر  $g(x) = 1 - f(x+2)$  و  $g^{-1}(x) = \sqrt{v-3x} - x$  باشد، حاصل  $f^{-1}(v)$  کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

$$f^{-1}(v) = x + 2$$

$$f(x+2) = v \rightarrow g(x) = 1 - v = -9$$

$$g(x) = -9 \rightarrow x = g^{-1}(-9) = \sqrt{v+18} + 9 = 11$$

$$f^{-1}(v) = x + 2 = 13$$



۲۶- تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{2x-1}$  و وارون آن، هر دو از نقطه‌ی به مختصات  $(3,1)$  می‌گذرند. طول نقطه‌ی

تلاقی  $f$  با نیمساز ربع اول کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad (۱)$$

$$(3,1) \in f$$

$$(3,1) \in f^{-1} \rightarrow (1,3) \in f$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{3a+b}{0} = 1 \\ \frac{a+b}{1} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{2x-1} = x \rightarrow 2x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

۲۷- اگر  $f(x) = 3 - \sqrt{x-1}$  باشد، نمودار توابع  $f^{-1} \circ f$  و  $f \circ f^{-1}$  در پاره خط  $AB$  مشترکند. طول

پاره خط  $AB$  کدام است؟

۴ (۴)

$2\sqrt{2}$  (۳) ✓

۲ (۲)

$\sqrt{2}$  (۱)

$f \circ f^{-1}(x) = x \quad x \in D_{f^{-1}} : x \leq 3$

$f^{-1} \circ f(x) = x \quad x \in D_f : x \geq 1$



۵۸  $f \circ f^{-1}$

$D_f = [1, +\infty)$

$\sqrt{x-1} \geq 0$

$-\sqrt{x-1} \leq 0$

$3 - \sqrt{x-1} \leq 3$

$R_f = (-\infty, 3]$

۲۸- اگر  $f(x) = 4\sqrt{x-4} + 1$  باشد، فاصله‌ی نقاط تقاطع نمودار  $f$  و  $f^{-1}$  چقدر است؟

$8\sqrt{2}$  (۴)

$6\sqrt{2}$  (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

فصل اول معادلات

$$4\sqrt{x-4} + 1 = x \rightarrow 4\sqrt{x-4} = x - 1$$

$$x - 1 \geq 0 \rightarrow 16x - 64 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow x^2 - 18x + 65 = 0$$

$$x = 5, 13$$

$$A(5, 0)$$

$$B(13, 13) \rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 13^2} = 13\sqrt{2}$$

## اعمال روی توابع با زوج مرتب

(۱) اگر در یک تابع دو زوج با مولفه‌ی اول یکسان داده است، باید مولفه‌ی دوم آنها نیز برابر باشد.

$$(1, a) \quad (1, b) \longrightarrow a = b$$

(۲) اگر در یک تابع یک به یک دو زوج با مولفه‌ی دوم یکسان داده است، باید مولفه‌ی اول آنها نیز برابر باشد.

$$(a, \varepsilon), (b, \varepsilon) \longrightarrow a = b$$

(۳) در تابع اکیداً صعودی اگر دو زوج مرتب متفاوت  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  داشته باشیم، با فرض  $x_1 > x_2$  باید  $y_1 > y_2$  باشد.

(۴) برای تشکیل تابعی که از انواع محاسبات (غیر از ترکیب و وارون) روی  $f$  و  $g$  به دست آمده، کافی است دو زوج مرتب با مولفه‌ی اول یکسان در  $f$  و  $g$  پیدا کنیم و عملیات را روی مولفه‌های دوم انجام دهیم. مثلاً:

$$(1, 4) \in f, (1, -2) \in g \Rightarrow 2f + \frac{\sqrt{f}}{g+1} : (1, 2 \times 4 + \frac{\sqrt{4}}{-2+1}) \Rightarrow (1, 6) \in 2f + \frac{\sqrt{f}}{g+1}$$

$$f \circ g = \{(1, 2)\}$$

(۵) برای تشکیل  $f \circ g$ ، زوج  $(x, y)$  از  $g$  را با زوج  $(y, z)$  از  $f$  ترکیب کرده و زوج  $(x, z)$  را در  $f \circ g$  قرار

می‌دهیم.

$$g = \{(1, 2)\}$$

$$f = \{(2, 0)\}$$

$$f \circ g = \{(1, 0)\}$$

(۶) برای تشکیل  $f^{-1}$  از روی  $f$  کافی است، جای مولفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب را عوض کنیم.

۲۹- اگر رابطه‌ی  $f = \{(-1, 3), (3, -1), (a-1, b^2-10), (a-4, 3), (5-a, b-4)\}$  تابع یک به یک

باشد مقدار  $a+b$  کدام است؟

۶ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) ✓

$$a-4 = -1 \rightarrow a = 3 \quad f = \{(-1, 3), (3, -1), (2, b^2-10), (2, b-4)\}$$

$$b^2-10 = b-4 \rightarrow b^2-b-6 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} b = -2 \\ b = 3 \end{array} \right\} f = \{(-1, 3), (3, -1), (2, -9), (2, -9)\} \checkmark$$

$$f = \{(-1, 3), (3, -1), (2, -1), (5, -1)\} \times$$

~~رابطه~~

۳- اگر  $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), \underline{(4,6)}\}$  و  $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$  دو تابع باشند، برد

(سراسری ریاضی فارغ ۹۱)

تابع  $(g^{-1} \circ f) - f$  کدام است؟

$\{2, -1\}$  (۴)

$\{3, 4\}$  (۳)

$\{2, 3\}$  (۲)

$\{-1, 4\}$  (۱)

$g^{-1} = \{(3,2), (2,4), (6,5), (1,3)\}$

$g^{-1} \circ f = \{\underline{(1,4)}, \underline{(4,5)}\}$

$g^{-1} \circ f - f = \{(1,2), (4,-1)\}$

پس  $\{2, -1\}$

## بخش‌پذیری و تقسیم چندجمله‌ای‌ها

رابطه‌ی تقسیم :

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 1 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 1} \\
 2x^2 + 1 \\
 \underline{2x^2 - 4x} \phantom{+ 1} \\
 4x + 1 \\
 \underline{4x - 8} \\
 9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 f(x) \quad | \quad p(x) \\
 \phantom{f(x)} \quad q(x) \\
 \hline
 r(x)
 \end{array}$$

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

در این رابطه :  $Q(x)$  خارج قسمت ،  $R(x)$  باقی‌مانده هستند و اگر باقی‌مانده صفر نباشد، درجه‌ی  $R(x)$  کمتر از درجه‌ی  $g(x)$  است.

$$x^3 + 1 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 9$$

$$x = 2 \rightarrow 9 = 9$$



## باقی مانده‌ی تقسیم بر عبارت درجه اول

باقی مانده‌ی تقسیم  $f(x)$  بر عبارت درجه اول  $ax + b$  از قرار دادن ریشه‌ی آن در  $f$  به دست می‌آید

$$R(x) = f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

مثال : باقی مانده‌ی تقسیم  $x^2 + x + 2$  بر  $x - 2$  ؟

$$R = f(2) = 1 + 2 + 2 = 5$$

## باقی مانده‌ی تقسیم بر عبارت درجه دوم

مثال: باقی مانده‌ی تقسیم  $f(x) = x^4 + x$  بر  $x^2 - 3x + 2$  را بیابید.

$$x^4 + x = (x^2 - 3x + 2) Q(x) + \underbrace{ax + b}_{\text{باقی مانده}}$$

$$\begin{cases} x=1 : & 1 = 0 + a + b \\ x=2 : & 16 = 0 + 2a + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = -14 \end{cases}$$

$$\underbrace{14x - 14}$$

نکته : مجموع ضرایب چند جمله‌ای  $f(x)$  برابر  $f(1)$  است.

$$f(x) = 2x^5 + 7x^3 - 4x^2 + 1$$

$$\text{مجموع ضرایب} = 2 + 7 - 4 + 1$$

$$= f(1)$$

$$\text{مجموع ضرایب} \quad f(x) = (x+1)^4 + (x+1)^2$$

$$f(1) = 1 + 9 = 10$$

۱۳۱- به ازای یک مقدار  $a$ ، چند جمله‌ای  $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$  بر  $2x - 1$  بخش پذیر

(سراسری ریاضی فارغ ۹۹)

است. در این حالت باقی مانده  $P(x)$  بر  $x + 2$ ، کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

-۸ (۲)

-۱۰ (۱)

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{16} + \frac{a}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \frac{a+1}{8} = 1$$

$$\rightarrow a = 7$$

$$P(-2) = 32 - 8a + 8 + 6 = 46 - 56 = -10$$

۳۲- اگر باقی مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای  $f(x)$  بر  $x^2 - x$  برابر  $4x + 1$  باشد، باقی مانده‌ی تقسیم

$f(x+2) + f(2x+2)$  بر  $x+1$  کدام است؟

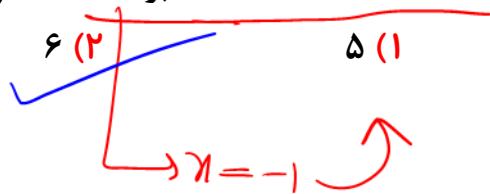
۴ (۴)

۳ (۳)

$$f(x) = (x^2 - x)Q(x) + 4x + 1$$

$$f(1) = 0 + 4 = 4$$

$$f(0) = 0 + 1 = 1$$



$$R = f(1) + f(0)$$

$$= 4 + 1 = 5$$

۳۳- باقی مانده‌ی تقسیم  $x^5 - 5x + 1$  بر  $x^2 + x - 2$  کدام است؟

$$-6x + 3 \quad (4)$$

$$3x - 6 \quad (3)$$

$$-9x + 6 \quad (2)$$

$$6x - 9 \quad (1)$$

$$x^5 - 5x + 1 = (x^2 + x - 2)Q(x) + \text{باقی مانده}$$

$a$  و  $b$

$$x = 1 : -3 = a + b$$

$$x = -2 : -21 = -2a + b$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -9 \end{cases} \rightarrow 6x - 9$$

## چند اتحاد مهم

$$n \text{ عدد طبیعی} \quad : a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$


$$a^y - b^y = (a - b)(a^{y-1} + a^{y-2}b + a^{y-3}b^2 + \dots + a^2b^{y-3} + ab^{y-2} + b^{y-1})$$





# آزمون

$$1) \frac{y}{x} = t \rightarrow t + \frac{1}{t} = 2 \rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \rightarrow t = 1$$

$$\frac{y}{x} = 1 \rightarrow y = x \quad x \neq 0$$

$$2) x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$$

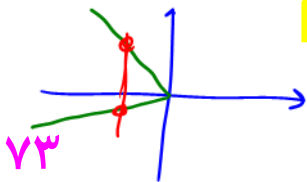
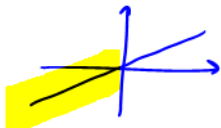
$$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 5 = 0 \rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

$$\rightarrow x-1=0 / y-2=0 \rightarrow f = \{(1, 2)\}$$

$$3) y \geq 0 \rightarrow x = -y$$



$$y < 0 \rightarrow x = 2y$$



۷۳

۳۴- در کدام گزینه،  $y$  تابعی از  $x$  نیست؟

$$\checkmark \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \quad (1)$$

$$\checkmark x^2 + y^2 + 5 = 2x + 4y \quad (2)$$

$$\times x = y - |2y| \quad (3) \checkmark$$

$$\checkmark y^2 + 2y = x + 4 \quad (4)$$

$$(y^2 + 2y) \leq 2y^2 + 2 > 0 \rightarrow \text{رنگهٔ صعودی}$$

$\rightarrow$  یک به یک

$$y^2 + 2y = x + 4 \rightarrow \text{تابع} \rightarrow \text{مادر یک جواب}$$

اگر  $f$  یک به یک،  $g$  یک به یک،  $f \circ g$  یک به یک است.

۳۵- اگر  $f = \{(1, 3), (2, a+1), (4, 2a)\}$  یک تابع خطی و  $g = \{(a-1, a+1), (3, a+2), (1, 2a)\}$  باشد، برد تابع  $g \circ f^{-1}$  کدام است؟

{۴, ۵, ۶} (۴)

{۴, ۶} (۳) ✓

{۵, ۶} (۲)

{۴, ۵} (۱)

$$m = \frac{a+1-3}{2-1} = \frac{2a-3}{4-1} \rightarrow 3a-9 = 2a-3 \rightarrow a=3$$

$$f = \{(1, 3), (2, 4), (4, 6)\}$$

$$f^{-1} = \{(3, 1), (4, 2), (6, 4)\}$$

$$g = \{(2, 4), (3, 5), (1, 6)\}$$

$$\rightarrow g \circ f^{-1} = \{(3, 4), (6, 6)\}$$

$$R_{g \circ f^{-1}} = \{3, 6\}$$

۱۳۶- اگر بازه‌ی  $(a, b)$  زیر مجموعه‌ی دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} + \log(20+x-x^2)$  باشد، بیشترین مقدار  $b-a$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

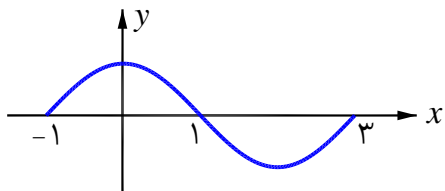
$$\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \geq 0$$



$$20+x-x^2 > 0 \rightarrow x^2-x-20 < 0 \rightarrow (x-5)(x+4) < 0$$

$$D_f = \underbrace{(-\varepsilon, -2)}_{b-a=2} \cup \underbrace{[1, 5)}_{b-a=\varepsilon}$$

۳۷- شکل روبه‌رو نمودار تابع  $y = f(x)$  است. دامنه‌ی تعریف تابع  $y = \sqrt{xf(1-2x)}$  کدام است؟



(۱)  $[-1, 0]$

(۲)  $[-1, 1]$  ✓

(۳)  $[-5, -1] \cup [0, 3]$

(۴)  $\{-1, 0, 1\}$

$$xf(1-2x) \geq 0 \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0, \underline{f(1-2x)} > 0 \rightarrow -1 < 1-2x < 1 \rightarrow 0 < x < 1 \xrightarrow{\wedge} 0 < x < 1 \\ x < 0, \underline{f(1-2x)} < 0 \rightarrow 1 < 1-2x < 3 \rightarrow -1 < x < 0 \xrightarrow{\wedge} -1 < x < 0 \\ x = 0, \underline{f(1-2x)} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow 1-2x = -1, 1, 3 \rightarrow x = 1, 0, -1 \end{array} \right\} \cup$$

$$D = [-1, 1]$$

۳۸- اگر  $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$  و برد تابع  $g(x) = \sqrt{12 - f(3x-1)}$  بازه‌ی  $[a, b]$  باشد،  $b - a$

کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳) ✓

۲ (۲)

۱ (۱)



$$\rightarrow 3 \leq f(x) < +\infty \xrightarrow{x \rightarrow 3x-1} 3 \leq f(3x-1) < +\infty$$

$$x=2 \rightarrow y=3 \quad -\infty < -f(3x-1) \leq -3 \rightarrow -\infty < 12 - f(3x-1) \leq 9$$

$$0 \leq \sqrt{12 - f(3x-1)} \leq 3 \rightarrow \mathcal{R}g = [0, 3]$$

۳۹- برد تابع  $f(x) = \sin^2 x + \cos x$  بازه‌ی  $[a, b]$  است. مقدار  $b - a$  کدام است؟

$$\frac{9}{4} \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$\frac{5}{4} \quad (۳)$$

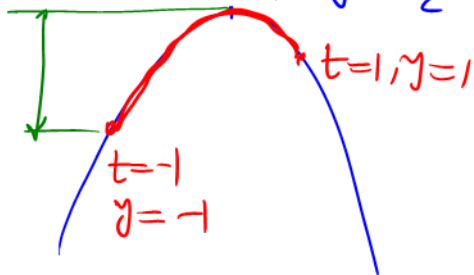
$$۲ \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$y = 1 - \cos^2 x + \cos x$$

$$\cos x = t \rightarrow y = -t^2 + t + 1 \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$t = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{9}{4}$$



$$R_f = \left[-1, \frac{9}{4}\right]$$

۱۴۰- برد تابع  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$  یک بازه است. نقطه‌ی میانی این بازه کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$y = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$$yx^2 + yx + y = x + 1$$

$$yx^2 + (y-1)x + y-1 = 0$$

$$\Delta = (y-1)^2 - 4y(y-1) \geq 0$$

$$(y-1)(y-1-4y) \geq 0$$

$$(y-1)(-3y-1) \geq 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{3} \leq y \leq 1$$

$$\frac{-\frac{1}{3} + 1}{2} = \frac{1}{3}$$

۴۱- اگر توابع  $f$  و  $g$  به عنوان ماشین به صورت  $x^2 \rightarrow [g] \rightarrow [f] \rightarrow 2x-1$  باشند و

$g(x) = 3x+1$  مقدار  $fog(2)$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

$$g(f(2x-1)) = x^2$$

$$3(f(2x-1)+1) = x^2$$

$$2x-1 = v \rightarrow x = E$$

$$3(f(v)+1) = 14 \rightarrow f(v) = 5$$

$$f \circ g(2) = f(g(2))$$

$$= f(7)$$

$$= 5$$



۱۴۶- اگر  $f(x) = x^2 + x$  باشد، خط  $y = 6$  نمودار تابع  $f \circ f$  را در نقاطی با کدام طول قطع می کند؟

(۴) ۱ و ۲

(۳) ۱ و -۲

(۲) ۱ و -۲ ✓

(۱) ۱ و ۲

$$f(\underbrace{f(x)}_a) = y \rightarrow a^2 + a = y \rightarrow a = 2, -3$$

$$f(x) = 2, -3 \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + x = 2 \rightarrow x = 1, -2 \\ x^2 + x = -3 \rightarrow \Delta < 0 \end{array} \right.$$

۱۳- اگر  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-x^2}$  باشند، دامنه‌ی تابع  $g \circ f$  کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج ۹۶)

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$x \in D_f \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) \in D_g \rightarrow 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \xrightarrow{x(1+x^2)} 0 \leq 1-x^2 \leq 1+x^2$$

$$\begin{cases} x^2 \leq 1 \\ x^2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow -1 \leq x \leq 1 \rightarrow D_{g \circ f} = [-1, 1]$$

$[-1, 1]$  (۲)  
 $\mathbb{R} - (-1, 1)$  (۴)  
 $[0, 1]$  (۱)  
 $\mathbb{R}$  (۳)

$$x - x^2 \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

۱۴۴- اگر  $f(x) = 3 - 2x$  و برد تابع  $f$  بازه  $[-3, 13]$  باشد، دامنه  $f \circ f$  تابع کدام است؟

$[-5, 9]$  (۴)

$[-23, 9]$  (۳)

$[0, 3]$  (۲) ✓

$[-5, 3]$  (۱)

$$-3 \leq 3 - 2x \leq 13 \rightarrow -5 \leq x \leq 3 \quad D_f = [-5, 3]$$

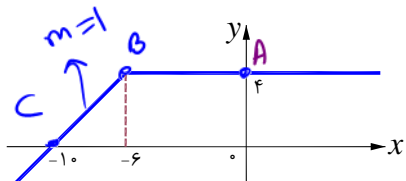
$f(f(x))$   
↪

$x \in D_f \rightarrow -5 \leq x \leq 3 \quad \xrightarrow{\cap} D_{f \circ f} = [0, 3]$

$f(x) \in D_f \rightarrow -5 \leq 3 - 2x \leq 3 \rightarrow 0 \leq x \leq 3$

۴۵- شکل روبه‌رو نمودار تابع  $y = f(-x+2)$  است. مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع

$y = f(2x-1) - 2$  با محورهای مختصات در ربع اول کدام است؟



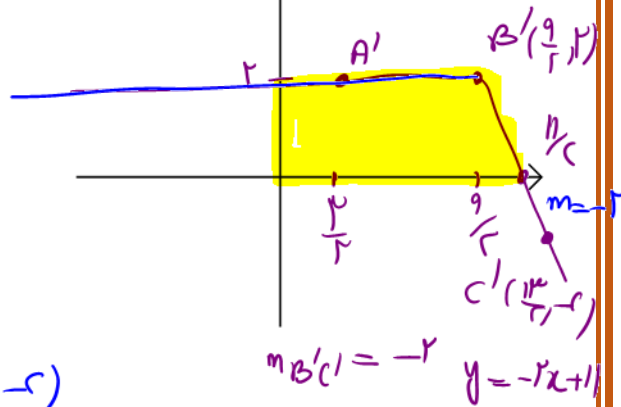
۶ (۲)

۵ (۱)

۱۲ (۴)

۱۰ (۳) ✓

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \left( \frac{9}{2} + \frac{11}{2} \right) = 10$$



A (0, 4) :  $y = f(-x+2) \rightarrow f(2) = 4$

$y = f(2x-1) - 2$   $\begin{cases} 2x-1=2 \rightarrow x = \frac{3}{2} \\ y = 4-2=2 \end{cases}$

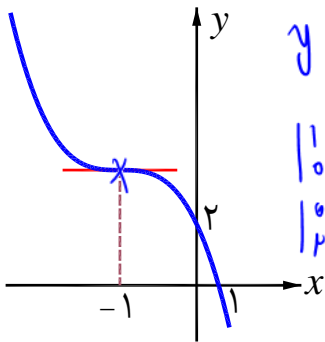
B (-6, 4)  $\rightarrow y = f(-x+2) \rightarrow f(1) = 4$

$y = f(2x-1) - 2 \rightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \rightarrow x = \frac{2}{2} \\ y = 4-2 \rightarrow y = 2 \end{cases}$

C (-1, 0)  $\rightarrow f(1) = 0$

۱۴  $y = f(2x-1) - 2$   $2x-1=5 \rightarrow y = 0-2$   $C'(\frac{11}{2}, 0)$

۱۴۶- نمودار تابع  $y = f(x)$  در شکل روبه‌رو از تبدیل  $y = x^3$  به دست آمده است. مقدار  $f(3)$  کدام است؟



$$y = a(x+1)^3 + b$$

$$\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \rightarrow 1a + b = 0$$

$$\begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \rightarrow a + b = 2$$

$$\rightarrow a = -\frac{2}{V}, b = \frac{14}{V}$$

$$f(x) = -\frac{2}{V}(x+1)^3 + \frac{14}{V}$$

$$f(3) = \frac{-112}{V} = -14$$

$$-16 \quad (2) \quad \checkmark$$

$$-12 \quad (4)$$

$$-18 \quad (1)$$

$$-14 \quad (3)$$

۴۷- نقطه‌ی  $A(2,5)$  روی نمودار تابع  $y = f(2x-1) - a$  است. اگر انتقال یافته‌ی آن روی نمودار

تابع  $y = 3 - f(b-x)$  مبدأ مختصات باشد، مقدار  $a+b$  کدام است؟

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) ✓

$$5 = f(2) - a \rightarrow f(2) = a + 5$$

$$5 = 3 - f(b) \rightarrow f(b) = 2$$

$$\rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=-1 \end{cases}$$

۴۸- دامنه و برد تابع  $y = f(x+1) - 2$  به ترتیب بازه‌های  $[-2, 6]$  و  $[-4, 4]$  هستند. اشتراک دامنه

و برد تابع  $y = \frac{1}{4} f(-2x)$  شامل چند عدد صحیح است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x \leq 6 \rightarrow -1 \leq x+1 \leq 7 \rightarrow D_f = [-1, 7] \\ -4 \leq f \leq 4 \rightarrow -2 \leq t \leq 6 \rightarrow R_f = [-2, 6] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq -2x \leq 7 \rightarrow -\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad D = [-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}] \\ -2 \leq f \leq 6 \rightarrow -1 \leq \frac{1}{4} f \leq 3 \quad R = [-1, 3] \end{array} \right.$$

$$y = \frac{1}{4} f(-2x) \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq -2x \leq 7 \rightarrow -\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad D = [-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}] \\ -2 \leq f \leq 6 \rightarrow -1 \leq \frac{1}{4} f \leq 3 \quad R = [-1, 3] \end{array} \right.$$

$$\rightarrow D \cap R = [-1, \frac{1}{2}] \rightarrow 0, -1$$

۱۴۹- اگر دامنه‌ی تعریف تابع  $y = f(2x+1)$  بازه‌ی  $(1, \infty)$  باشد و  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1$  و دامنه‌ی تابع

$f \circ g$  بازه‌ی  $(a, b)$  باشد، مقدار  $b - a$  کدام است؟

۴ (۴) ✓

۸ (۳)

۱۶ (۲)

۶۴ (۱)

$$x > 1 \rightarrow 2x + 1 > 3 \rightarrow D_f = (3, +\infty)$$

$D(g(x))$

$$\left. \begin{array}{l} x \in D_g \rightarrow x - 1 > 0 \rightarrow x > 1 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\wedge} D_{f \circ g} = (1, 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) \in D_f \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1 > 3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} > 4 \rightarrow 1 > \sqrt{x-1} \rightarrow \sqrt{x-1} < 1 \\ \rightarrow x - 1 < 4 \rightarrow x < 5 \end{array} \right\}$$



۵۰- این تغییرات را به ترتیب روی نمودار تابع  $y = |x| + 1$  انجام می دهیم: انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{3}$ ،

۱ واحد انتقال افقی به سمت چپ، قرینه نسبت به محور  $y$ ، قرینه نسبت به محور  $x$ ، ۴ واحد انتقال

عمودی به سمت بالا. طول یکی از نقاط برخورد نمودار حاصل با نمودار تابع اصلی کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$\frac{5}{3} \quad (4)$$

$$y = |x| + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 2x} y = |2x| + 1 \xrightarrow{x \rightarrow x+2} y = |2x+2| + 1$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow -x} y = |-2x+2| + 1 \xrightarrow{-1} y = -|-2x+2| - 1 \xrightarrow{+6} y = -|2x-2| + 5$$

$$y = -|2x-2| + 5 \rightarrow 1 + |x| = |2x-2| + 5 \rightarrow$$

$$|x| + |2x-2| = 4 \begin{cases} x=0 \rightarrow -2 = 4 \rightarrow \text{نه} \\ x=1 \rightarrow 1 = 4 \rightarrow \text{نه} \\ x=2 \rightarrow 2 = 4 \rightarrow \text{نه} \\ x=3 \rightarrow 3 = 4 \rightarrow \text{نه} \\ x=4 \rightarrow 4 = 4 \rightarrow \text{بله} \end{cases}$$

۵- نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت بالا می‌بریم و سپس در امتداد محور  $x$  با ضریب ۲ منبسط

می‌کنیم. اگر معادله‌ی تابع حاصل به صورت  $y = \sqrt{2x-1} - 2$  باشد، نمودار تابع  $f$  محور  $x$  را در

نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$$y = \sqrt{2x-1} - 2 \xrightarrow[\text{در (ساده) با ضریب } \frac{1}{2} \text{ منقبض}]{\frac{5}{2} \text{ (۴) ✓}} y = \sqrt{4x-1} - 2 \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \text{ (۳)} \quad \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \text{ (۲)} \quad \begin{matrix} 10 \\ 1 \end{matrix} \text{ (۱)}$$

$$\xrightarrow[\text{مربع - ۱}]{\text{جواب دهیم}} y = \sqrt{4x-1} - 3 = 0 \rightarrow \sqrt{4x-1} = 3 \rightarrow$$

$$4x-1=9 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

۵۲- نقطه‌ی  $A(x_0, y_0)$  واقع بر نمودار تابع  $y = f(2x) + 1$  است. با تبدیل این تابع به تابع

$y = 2f(x-1)$  ، نقطه‌ی  $A$  به کدام نقطه تبدیل می‌شود؟

(۲)  $(2x_0 + 1, 2y_0 - 2)$  ✓

(۱)  $(2x_0 - 1, 2y_0 + 2)$

(۴)  $(\frac{1}{2}x_0 + 1, \frac{1}{2}y_0 - 2)$

(۳)  $(\frac{1}{2}x_0 - 1, \frac{1}{2}y_0 + 2)$

$$y_0 = f(2x_0) + 1 \rightarrow f(2x_0) = y_0 - 1$$

$$f(x-1) = \frac{y}{2}$$

$$\begin{cases} x-1 = 2x_0 & \rightarrow x = 2x_0 + 1 \\ \frac{y}{2} = y_0 - 1 & \rightarrow y = 2y_0 - 2 \end{cases}$$

۵۳- اگر  $f(x) = 2 - x + \sqrt{6 - x}$  و دامنه‌ی تعریف تابع  $y = \sqrt{f(2x) - f(3-x)}$  بازه‌ی  $[a, b]$  باشد، مقدار  $b - a$  کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

فراشه‌ی نزدیکی  $D_f: x \leq 4$

$$2x \in D_f \rightarrow 2x \leq 4 \rightarrow x \leq 2$$

$$3-x \in D_f \rightarrow 3-x \leq 4 \rightarrow -1 \leq x$$

$$\cancel{f(2x) \geq f(3-x)} \xrightarrow{\text{فراشه‌ی نزدیکی}} 2x \leq 3-x \rightarrow x \leq 1$$

$$\cap \rightarrow D = [-1, 1]$$

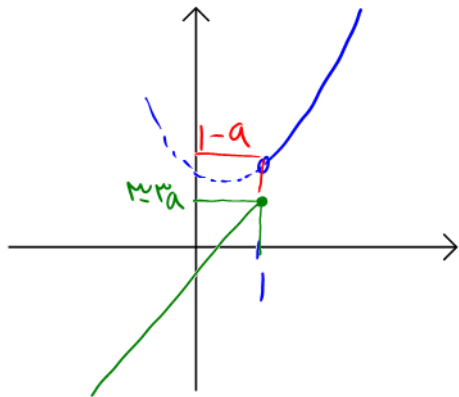
۵۴- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x - 3a & x \leq 1 \\ x^2 - ax & x > 1 \end{cases}$  در  $\mathbb{R}$  یک به یک باشد، محدوده‌ی تغییرات  $a$  کدام است؟

$a \geq 2$  یا  $a \leq 1$  (۴)

$a \geq 2$  (۳)

$1 \leq a \leq 2$  (۲) ✓

$a \leq 1$  (۱)



$x_2 \leq 1 \rightarrow \frac{a}{2} \leq 1 \rightarrow a \leq 2$

$3-3a \leq 1-a \rightarrow a \geq 1$

$\rightarrow 1 \leq a \leq 2$

۵۵- اگر  $f = |x| - 3x$  باشد، مجموع طول نقاط تقاطع تابع  $y = f^{-1}(x)$  و  $y = 2 - |x|$  کدام است؟

$$\frac{10}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{8}{3} \text{ (۳)}$$

$$\frac{4}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۱)}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 : y = -2x & : x = -\frac{y}{2} \geq 0 \rightarrow y \leq 0 \\ x < 0 : y = -3x & : x = -\frac{y}{3} < 0 \rightarrow y > 0 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & x \leq 0 \\ -\frac{x}{3} & x > 0 \end{cases} \quad g = \begin{cases} 2+x & x < 0 \\ 2-x & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \leq 0 &\rightarrow -\frac{x}{2} = 2+x \rightarrow x = -\frac{4}{3} \quad \oplus \\ x > 0 &\rightarrow -\frac{x}{3} = 2-x \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۹۴

۵۶- وارون تابع  $f(x) = 16^x + 2^{2x+1}$  را به صورت  $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} u(x)$  نوشته‌ایم. نمودار  $y = u(x)$

خط  $y = 3$  را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱۰۱ (۴)

۹۹ (۳) ✓

۱۷ (۲)

۱۵ (۱)

$$y = (2^x)^2 + 2^{2x+1} = 2^{2x} + 2^{2x} \cdot 2 = 2^{2x} + 2^{2x+1} \quad \varepsilon^x = t \quad y = t^2 + 2t \xrightarrow{+1}$$

$$(t+1)^2 = y+1 \rightarrow |t+1| = \sqrt{y+1} \xrightarrow{t > 0} t = \sqrt{y+1} - 1$$

$$\varepsilon^x = \sqrt{y+1} - 1 \rightarrow 2^x = \sqrt{y+1} - 1 \quad x = \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{y+1} - 1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{2} = u(x) \quad \sqrt{x+1} - 1 = 3 \rightarrow \sqrt{x+1} = 10 \quad x = 99$$

۹۵

۵۷- اگر  $g(x) = x + \sqrt{4x-4}$  و  $f \circ g^{-1}(2x) = 3x-1$  باشد،  $f^{-1}(5)$  برابر کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$3x-1=5 \rightarrow x=2$$

$$x=2 \rightarrow f(g^{-1}(2)) = 5 \rightarrow f^{-1}(5) = g^{-1}(2)$$

$$g^{-1}(2) = x + \sqrt{4x-4} = 2 \xrightarrow{\text{از هر دو طرف}} x=2$$



۵۸- اگر  $f(x) = x^2 - 2x; x \geq 1$  و  $g^{-1}(x) = 2x + 1$  باشد، محل تلاقی نمودار وارون تابع  $g^{-1} \circ f^{-1}$  با محور  $x$  کدام طول را دارد؟

$$-\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$۵ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$(g \circ f^{-1})^{-1} = f \circ g \rightarrow f \circ g(x) = 0 \rightarrow f(g(x)) = 0$$

$$f(a) = 0 \rightarrow a^2 - 2a = 0 \quad a \geq 1 \rightarrow \underline{a = 2}$$

$$g(x) = 2 \rightarrow x = g^{-1}(2) \rightarrow x = 0.5$$

۵۹- وارون تابع  $f(x) = \frac{ax+a-1}{x+2a-6}$  بر خودش منطبق است. مقدار  $f^{-1}(3)$  کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

$$2a-4 = -a \quad ; \quad \begin{matrix} x \\ \text{بنا بر} \end{matrix} = \begin{matrix} y \\ \text{بنا بر} \end{matrix} \rightarrow -(2a-4) = a$$

$$\underline{a=2}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$f^{-1}(3) = f(3) = 5$$

۶۰- تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = x - \frac{1}{2x}$  بر دامنه‌ی  $(0, +\infty)$  مفروض است. نمودار تابع  $f^{-1}$  نیمساز

(سراسری تیربی فارغ ۹۹)

ناحیه‌ی دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

$$-\frac{1}{2} \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$-1 \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۱)$$

$$x - \frac{1}{2x} = -x$$

$$2x = \frac{1}{x} \rightarrow 2x^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A' \mid \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \rightarrow A \mid \begin{matrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}$$

$$A \mid \beta \leftarrow y = -x \quad \text{و} \quad f^{-1}$$

$$A' \mid \beta \quad y = -x \quad \text{و} \quad f$$

۶۱- اگر  $f(x) = x^2 - x - 12$  و  $g(x) = \sqrt{12+x}$  باشد، مجموع طول نقاط تقاطع نمودار تابع

$f \circ g^{-1}$  با محور  $x$  ها کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲) ✓

۶ (۱)

$$f(g^{-1}(x)) = 0 \rightarrow f(a) = 0 \rightarrow a^2 - a - 12 = 0 \rightarrow a = 4, -3$$

$$\begin{cases} g^{-1}(x) = 4 \\ g^{-1}(x) = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = g(4) = 4 \\ x_2 = g(-3) = 3 \end{cases} \rightarrow x_1 + x_2 = 7$$

۶۲- اگر  $f = \{(1,2), (2,5), (3,1), (4,1)\}$  و  $g(x) = x + 3$  و  $h = f + g$  باشد، کدام زوج مرتب عضو

تابع  $h \circ g$  نیست؟

✓ (۱,۸) (۴)

× (۰,۵) (۳)

✓ (-۱,۱۰) (۲)

✓ (-۲,۶) (۱)

$$f = \{(1,2), (2,5), (3,1), (4,1)\}$$

$$g = \{(1,4), (2,5), (3,4), (4,7), \dots\}$$

$$f+g = \{(1,4), (2,10), (3,7), (4,11)\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_h$

نمودار  $h$  سرد و صدمه  $\rightarrow$

$$h \circ g = h(g(x)) = h(x+3) \rightarrow$$

$$h \circ g = \{(-2,4), (-1,10), (0,7), (1,11)\}$$

۶۳- اگر رابطه‌ی  $f = \{(4, 8), (a, 5), (3, 3a+1), (a^2-2, 5), (1, b)\}$  تابع اکیداً یکنوا باشد،

مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر  $b$  کدام است؟

$$b > 7 \quad (4)$$

$$b < -2 \quad (3)$$

$$b > 8 \quad (2)$$

$$b < 5 \quad (1)$$

$$a^2 - 2 = a \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$a = 2: f = \{(1, b), (2, 5), (3, 7), (4, 8)\}$$

$$b < 5$$

$$a = -1: f = \{(-1, 5), (1, b), (3, -2), (4, 8)\}$$

X

۶۴- دو تابع  $f = \{(1, 3), (2, -3), (3, 0), (4, -1), (5, 1)\}$  و  $g(x) = 2x + 3$  مفروض اند.

اگر  $g^{-1} \circ f^{-1}(2a) = a + 1$  باشد، مجموع مقادیر ممکن برای  $a$  کدام است؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲) ✓

-۱ (۱)

$$g^{-1}(f^{-1}(2a)) = a + 1 \rightarrow f^{-1}(2a) = \underbrace{g(a+1)}_{2(a+1) + 3}$$

$$f^{-1}(2a) = 2a + \delta \rightarrow f(2a + \delta) = 2a$$

$$(2a + \delta, 2a) \in f$$

$$x \quad y$$

$$y = x - \delta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2a + \delta, 2a) = (1, 3) \rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ (2a + \delta, 2a) = (4, -1) \rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2a + \delta, 2a) = (2, -3) \rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ (2a + \delta, 2a) = (3, 0) \rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ (2a + \delta, 2a) = (5, 1) \rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

۶۵- اگر  $f(x) = x^4 + ax^3 - 1$  در تقسیم بر  $x+1$  و  $x-2$  به ترتیب باقی مانده‌ی ۱ و  $b$  داشته باشد، مقدار  $a+b$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲) ✓

۵ (۱)

$$\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(2) = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 - a - 1 = 1 \rightarrow a = -1 \\ 14 + 1a - 1 = b \rightarrow b = 7 \end{cases}$$



۶۶- اگر چند جمله‌ای  $f(x)$  در تقسیم بر  $x+4$  و  $x-2$  به ترتیب باقی مانده‌ی ۱ و  $-5$  داشته باشد،

باقی مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای  $f(2x)+x$  بر  $x^2+x-2$  کدام است؟

$$-x-3 \quad (4)$$

$$3-x \quad (3)$$

$$x-3 \quad (2)$$

$$x+3 \quad (1)$$

$$f(-4) = 1 \quad \text{و} \quad f(2) = -5$$

$$f(2x)+x = \overbrace{(x^2+x-2)}^{n=1, 2} Q(x) + ax+b$$

$$\begin{cases} x=1 : f(2)+1 = a+b \\ x=-2 : f(-4)-2 = -2a+b \end{cases} \quad \begin{cases} a+b = -5 \\ -2a+b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$$

۱۰۵

$$\rightarrow \underline{-x-3}$$

۶۷- اگر  $a^5 - b^5 = ۸۲$ ،  $a^4 + b^4 = ۳۴$  و  $a - b = ۲$  باشند، حاصل  $a^3b + a^2b^2 + ab^3$  کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$



$$۸۲ = ۲ (۳۴ + x) \rightarrow ۳۴ + x = ۴۱ \rightarrow x = ۷$$

۶۸- مجموعه‌ی  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  مفروض است. چند تابع  $f$  از  $A$  به  $A$  می‌توان تعریف کرد که برای

هر زوج  $(x, y)$  از  $f$ ، عدد  $x + y$  فرد باشد؟

۱۰۸ (۴)

۷۲ (۳)

۳۱ (۲)

۱۷ (۱)

$$f(1) = 2, 4$$

$$f(2) = 1, 3$$

$$f(3) = 1, 3$$

$$f(4) = 1, 3, 5$$

$$f(5) = 1, 3, 5$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$$

۱۰۷