



# کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

## ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

### فصل نهم : تابع

مهرداد عباسپور

#### مفاهیم اولیه ی تابع

#### (۱) تشخیص تابع بودن :

برای هر  $x$  از دامنه ی تابع فقط یک  $y$  وجود دارد.

#### (۲) توابع خاص :

تابع ثابت  $(f(x) = c)$  ، تابع همانی  $(f(x) = x)$  ، تابع خطی  $(f(x) = ax + b)$

تابع چندجمله ای درجه  $n$   $(f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c)$  که  $a \neq 0$  ،

تابع گویا (تقسیم دو چندجمله ای)

۱- در کدام گزینه،  $y$  تابعی از  $x$  است ؟

$$(1) \sqrt{\cos y} = 1 + x^2$$

$$(2) \frac{x+1}{2y+3} = y$$

$$(3) y^3 - 3y = x^2 + 1$$

$$(4) x^2 + y^2 + 4x = 2y - 5$$



۲- اگر  $f$  یک تابع خطی و  $g(x) = f(x+1) + f(x-2)$  تابع همانی باشد، عرض از مبدأ  $f$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)       $\frac{1}{2}$  (۳)       $\frac{1}{4}$  (۴)

## دامنه‌ی تعریف تابع

(۱) شرایط لازم در توابعی که ما می‌شناسیم:

$$\frac{A}{B} : B \neq 0, \quad \sqrt[n]{A} : A \geq 0, \quad \log_B A : (A > 0, B > 0, B \neq 1)$$

(۲) مسائلی که می‌خواهیم دامنه‌ی تعریف یک تابع  $\mathbb{R}$  باشد.

(۳) تعیین دامنه‌ی توابع از روی نمودار

(۴) تساوی دو تابع (دامنه‌ها برابر برای هر  $x$  از دامنه مقادیر دو تابع برابر)

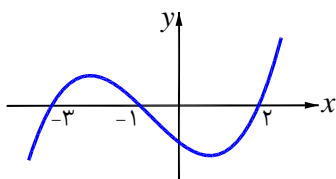
۳- دامنه‌ی تعریف تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + 5x + a}}{x^2 + ax + 7}$  ، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. برای  $a$

چند مقدار صحیح وجود دارد؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۴- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x)$  است. دامنه‌ی تابع غیرنقطه‌ای  $\sqrt{(x+1)f(x)}$  ،

(سراسری ریاضی فارغ ۹۷)



کدام است؟

- ۱ (۱)  $[-3, 2]$       ۲ (۲)  $[-1, +\infty)$   
 ۳ (۳)  $(-\infty, -1]$       ۴ (۴)  $\mathbb{R} - (-3, 2)$

۵- کدام دو تابع برابر نیستند؟

۱ (۱)  $f(x) = \log x^4$  و  $g(x) = 2 \log x^2$

۲ (۲)  $f(x) = \sqrt{(1-x)^2}$  و  $g(x) = |x-1|$

۳ (۳)  $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x} + 2}$  و  $g(x) = \frac{|x+1|}{\sqrt{x}}$

۴ (۴)  $f(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$  و  $g(x) = \log x - \log(1-x)$



## برد تابع

(۱) برد با توجه به نمودار

(۲) ساختن تابع از برد توابعی که می‌شناسیم.

(۳) برد تابع  $y = f(ax+b)$  با برد تابع  $y = f(x)$  یکسان است. ( $a \neq 0$ )

(۴) تغییر متغیر

(۵) برد توابع یکنوای اکید پیوسته

(۶) روش یافتن  $x$  بر حسب  $y$

مثال: برد تابع  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  ;  $0 < x < 2$

مثال: برد تابع  $y = x^2 - 4x + 1$

مثال: برد تابع  $y = x + |x-1| - |x+1|$

مثال: برد تابع  $y = \sqrt{9 - \sqrt{3x-1}}$

مثال: برد تابع  $y = \sin x - \sin^2 x$

مثال: برد تابع  $y = 2x + \sqrt{x-2}$

مثال: برد تابع  $y = \frac{x+1}{x^2+3}$

۶- برد تابع  $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{6x - x^2}}$  بازه‌ی  $[a, b]$  است. مقدار  $b - a$  کدام است؟

۱ (۱)                      ۲ (۲)                      ۳ (۳)                      ۴ (۴)

۷- اگر  $f(x) = 2 - |x-1|$  و  $g(x) = x + |x|$ ، آنگاه برد تابع  $(\frac{f}{g})(x)$ ، کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج ۹۷)

(۱)  $(-\infty, \frac{1}{2})$                       (۲)  $(-1, +\infty)$

(۳)  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$                       (۴)  $(0, +\infty)$



۸- مجموع اعضای برد تابع  $f(x) = [4x+1] - 4[x]$  برابر کدام است؟

- ۱۰ (۴)                      ۹ (۳)                      ۸ (۲)                      ۶ (۱)

## اعمال بین توابع

مثال: در هر حالت از سه تابع  $f$ ،  $g$  و  $f \circ g$  دو تا معلوم است. سومی را بیابید.

$$f(x) = x^2 + x, g(x) = 2x + 3$$

$$f(x) = x^2 + 1, f \circ g(x) = 4x + 2$$

$$g(x) = 3x + 1, f \circ g(x) = x^2$$

## ریشه‌های $f \circ g$

مثال: با فرض  $f(x) = x^2 - 8x + 15$  و  $g(x) = 2\sqrt{x} + 1$  ریشه‌های  $f \circ g$  را بیابید.

مثال: با توجه به اینکه  $x^3 \rightarrow [g] \rightarrow [f] \rightarrow x+2$ ، اگر  $g(x) = 3x+1$  باشد،  $f(7)$ ؟

۹- اگر  $f(x) = 2x - 1$  و  $g \circ f(x) = 4x^2 - 8x$  باشد، نمودار تابع  $f \circ g$ ، نیمساز ربع اول را در

نقطه‌ی با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۳/۵ (۴)                      ۳ (۳)                      ۲ (۲)                      ۱/۵ (۱)

۱۰- اگر  $f(x+2\sqrt{x}) = x^2 - 6x$  باشد، مقدار  $f(1)$  کدام است؟

- ۲ (۴)                      -۱ (۳)                      ۲ (۲)                      ۱ (۱)

۱۱- اگر  $f(x) = x^3 - x$  و  $g(x) = x^2 - x$ ، تابع  $f \circ g$  در چند نقطه محور  $x$  ها را قطع می‌کند؟

- ۴ (۴)                      ۳ (۳)                      ۶ (۲)                      ۵ (۱)

## تعیین دامنه و برد تابع $f \circ g$

مثال: اگر  $f(x) = \sqrt{2x-1} + 2$  و  $g(x) = \sqrt{6-x}$  باشد، دامنه‌ی تعریف  $g \circ f$  را بیابید.

مثال: اگر  $f(x) = \sqrt{2x-1} + 2$  و  $g(x) = \sqrt{6-x}$  باشد، برد  $g \circ f$  را بیابید.



۱۲- اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$  و  $g(x) = \frac{2x+1}{x+2}$  باشد، در دامنه‌ی تعریف تابع  $f \circ g$  چند

عدد صحیح وجود دارد؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۳- اگر  $f(x) = [x] - x$  و  $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$  باشند، برد تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟

(سراسری تیرین خارج ۹۹)

(۲)  $(-1, 1]$

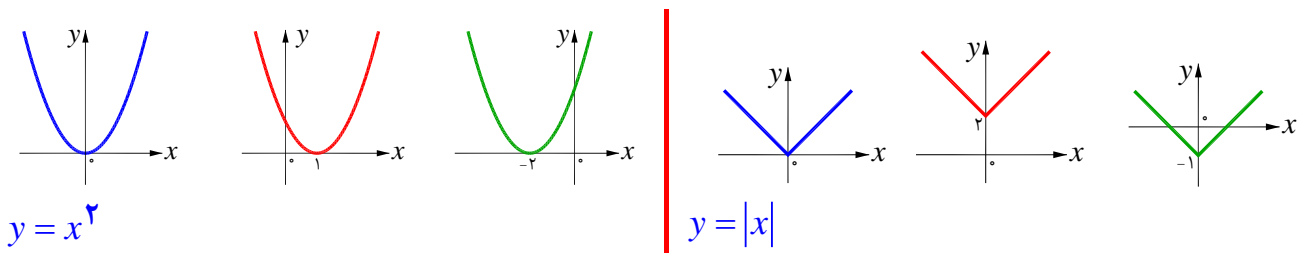
(۱)  $[-1, 1)$

(۴)  $(-\infty, 1]$

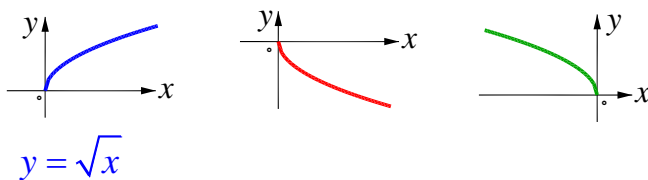
(۳)  $[1, +\infty)$

## تبدیل نمودارها

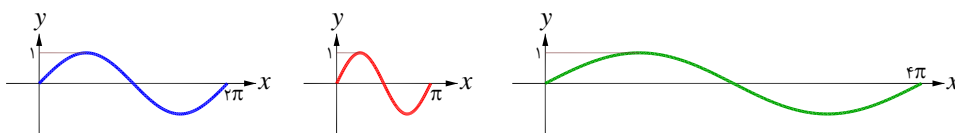
### (۱) انتقال افقی و عمودی



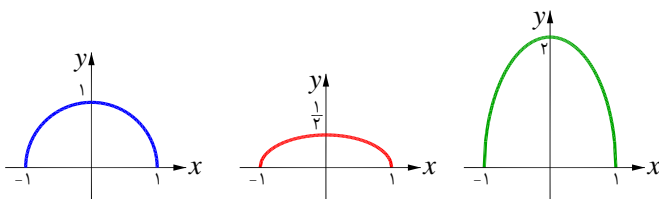
### (۲) بازتاب نسبت به محور $x$ و $y$ :



### (۳) انبساط و انقباض افقی و عمودی :



$y = \sin x$



$y = \sqrt{1-x^2}$



## (۴) به دو روش تبدیل $x$ به $ax+b$ دقت کنید.

مثال: می‌خواهیم از روی نمودار  $y = f(x)$  ، نمودار تابع  $y = f(2x-4)$  را رسم کنیم.

### اثر تبدیل‌ها بر ضابطه‌ی تابع

مثال: اگر نمودار تابع  $y = x^2 - x$  را به ترتیب، ۲ واحد منتقل به چپ، بازتاب نسبت به محور  $x$ ، انبساط افقی با ضریب ۲، ۳ واحد به بالا منتقل کنیم، ضابطه‌ی تابع جدید را بیابید.

### یافتن نقطه‌ی متناظر روی نمودار تبدیل یافته

مثال: اگر نقطه‌ی  $A(2,3)$  روی تابع  $y = f(2x+1) - 3$  باشد، نقطه‌ی متناظر بر نمودار  $y = 2f(3-x)$  را بیابید.

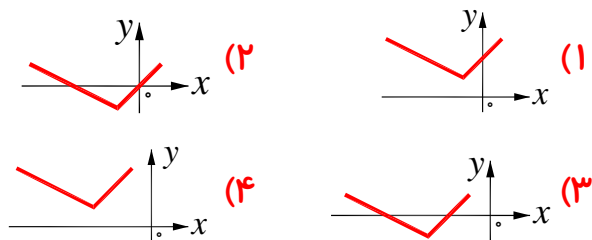
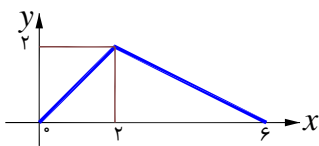
### اثر تبدیل‌ها بر دامنه‌ی تابع

مثال: اگر دامنه‌ی تعریف تابع  $y = 3f(3x-1) + 1$  بازه‌ی  $(1,2]$  باشد، دامنه‌ی تعریف تابع  $y = 1 - 2f(4-2x)$  را بیابید.

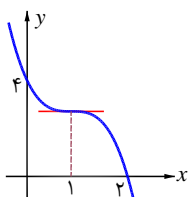
### اثر تبدیل‌ها بر برد تابع

مثال: اگر برد تابع  $y = 2f(1-x) + 1$  بازه‌ی  $(-\infty, 5)$  باشد، برد تابع  $y = 3 - f(2x+3)$  را بیابید.

**۱۴-** اگر نمودار تابع  $y = f(x) + 1$  شکل زیر باشد، نمودار تابع  $y = -f(1-x)$  شبیه کدام است؟



**۱۵-** شکل مقابل نمودار تبدیل یافته‌ی تابع  $y = x^3$  است، مقدار این تابع به ازای  $x = 3$  کدام است؟



- (۱) -۱۴
- (۲) -۱۶
- (۳) -۲۰
- (۴) -۲۴



۱۶- نمودار تابع  $y = -x^2 + 2x + 5$  را ۳ واحد به طرف  $x$  های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف  $y$  های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

(سراسری ریاضی ۹۸)

(۱)  $(3, 4)$       (۲)  $(2, 5)$

(۳)  $(3, 5)$       (۴)  $(2, 6)$

۱۷- اگر دامنه‌ی تعریف تابع  $y = f(x+1)$  بازه‌ی  $[-3, 2]$  باشد، دامنه‌ی تعریف تابع

$y = f(2-x) + f(\frac{4}{5}x)$  کدام است؟

(۱)  $[-1, \frac{12}{5}]$       (۲)  $[-1, \frac{15}{4}]$       (۳)  $[1, \frac{4}{5}]$       (۴)  $[1, \frac{5}{4}]$

۱۸- اگر  $A(0, 3)$  رأس سهمی  $y = f(1 - \frac{1}{4}x)$  باشد، رأس سهمی  $y = 1 - 2f(-x)$  کدام است؟

(۱)  $(-1, -5)$       (۲)  $(-1, -1)$       (۳)  $(-2, -5)$       (۴)  $(-2, -1)$

## توابع یکنوا و یک به یک

برای اعداد  $a$  و  $b$  در دامنه‌ی تعریف تابع :

$a > b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$	تعریف تابع صعودی
$a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$	تعریف تابع اکیداً صعودی
$a > b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$	تعریف تابع نزولی
$a > b \Rightarrow f(a) < f(b)$	تعریف تابع اکیداً نزولی

## تابع یک به یک :

تابعی که هیچ دو نقطه‌ای از آن عرض برابر نداشته باشند.

## دقت کنید !

$\Rightarrow f(a) > f(b)$  ، تابع  $f$  اکیداً صعودی

$\Rightarrow f(a) \geq f(b)$  ، تابع  $f$  اکیداً صعودی

$\Rightarrow f(a) > f(b)$  ، تابع  $f$  اکیداً نزولی

$\Rightarrow f(a) \geq f(b)$  ، تابع  $f$  اکیداً نزولی



$f(a) > f(b) \Rightarrow$  تابع  $f$  صعودی

$f(a) \geq f(b) \Rightarrow$  تابع  $f$  صعودی

$f(a) > f(b) \Rightarrow$  تابع  $f$  نزولی

$f(a) \geq f(b) \Rightarrow$  تابع  $f$  نزولی

## اعمال روی توابع یکنوا

اکیداً صعودی + اکیداً صعودی

اکیداً نزولی + اکیداً نزولی

	اکیداً صعودی	اکیداً نزولی
اکیداً صعودی		
اکیداً نزولی		

۱۹- تابع  $f(x) = 2|x+1| - |x|$  در بازه  $[a, +\infty)$  اکیداً یکنواست. وضعیت یکنوایی  $f$  در این بازه و کمترین مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) اکیداً صعودی ، صفر  
 (۲) اکیداً صعودی ، -۱  
 (۳) اکیداً نزولی ، صفر  
 (۴) اکیداً نزولی ، -۱

۲۰- اگر  $f$  تابع اکیداً نزولی با دامنه  $[1, 9]$  باشد و دامنه  $f$  تابع

$y = \sqrt{f(2x-3)} - f(x+2)$  بازه  $[a, b]$  باشد، مقدار  $b - a$  برابر کدام است؟

- (۱) ۵      (۲) ۶      (۳) ۳      (۴) ۴

(سراسری ریاضی ۹۷)

۲۱- کدام یک از تابع های زیر، یک به یک است؟

(۱)  $f(x) = x + \sqrt{x}$       (۲)  $g(x) = x - \sqrt{x}$

(۳)  $h(x) = 2x + \frac{1}{x}$       (۴)  $p(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

۲۲- تابع  $f(x) = \begin{cases} 4 - \sqrt{x+1} & x < 0 \\ a - x & x \geq 0 \end{cases}$  یکنواست. چند مقدار طبیعی برای  $a$  وجود دارد؟

- (۱) بی شمار      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴





## وارون تابع

### مفهوم وارون تابع :

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

### شرط وارون پذیری :

وارون تابع  $f$  در صورتی تابع است که  $f$  یک به یک باشد.

### ضابطه‌ی تابع وارون :

با توجه به اینکه :  $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$  ، برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون  $f$  کافی است از رابطه‌ی  $y = f(x)$  ،  $x$  را بر حسب  $y$  بیابیم.

### وارون تابع هموگرافیک :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

### نکته !!

در تست اگر در چهار گزینه، ضابطه برای وارون تابع داده است، می‌توانید با آزمایش کردن یک نقطه برخی گزینه‌ها را رد کنید.

### دامنه و برد تابع وارون

$$\text{دامنه‌ی } f = \text{برد } f^{-1} \quad , \quad \text{برد } f = \text{دامنه‌ی } f^{-1}$$

### نمودار وارون تابع

نمودار توابع  $f$  و  $f^{-1}$  نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند.

### ترکیب تابع با وارون آن

$$f^{-1} \circ f(x) = x; x \in (\text{دامنه‌ی تعریف } f)$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x; x \in (\text{دامنه‌ی } f^{-1}) = (\text{برد } f)$$

### وارون ترکیب دو تابع :

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$



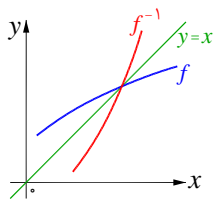
## وارون چه توابعی بر خودشان منطبق اند ؟

از نظر هندسی هر تابعی که نیمساز ربع اول و سوم محور تقارن نمودار آن باشد.

توابع خطی :

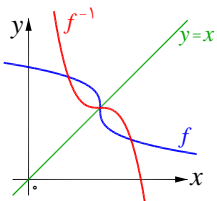
تابع هموگرافیک :

## تلاقی تابع با وارونش :



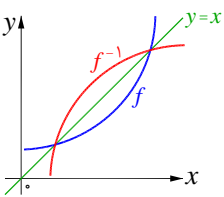
(الف) اگر نمودار تابع  $f$  نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را در نقطه‌ای قطع

کند، نمودار  $f^{-1}$  نیز از این نقطه می‌گذرد.



(ب) نمودار تابع  $f$  و  $f^{-1}$  ممکن است در نقاطی خارج از نیمساز ربع اول

و سوم نیز یکدیگر را قطع کنند.



(پ) اگر  $f$  یک تابع اکیداً صعودی باشد، در صورتی که  $f$  و  $f^{-1}$  در

نقاطی همدیگر را قطع کنند، این نقاط حتماً روی نیمساز ربع اول و سوم است.

پس در این حالت برای یافتن نقاط تقاطع  $f$  و  $f^{-1}$  کافی است  $f$  را با نیمساز

ربع اول و سوم قطع دهیم.

## تلاقی وارون‌های دو تابع :

مثال : اگر  $f(x) = x + \sqrt{2x-1}$  و  $g(x) = 2x - 11$  باشد، نقطه‌ی تلاقی  $f^{-1}$  و  $g$  را بیابید.

۲۳- اگر  $g(x)$  وارون تابع  $f(x) = x + \sqrt{x}$  باشد، مقدار  $g(6) + g(12)$ ، کدام است ؟

(سراسری تیربی ۹۹)

۱۰ (۱)

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۲۴- وارون تابع  $y = 8x - 4x^2$  در بخش نزولی نمودار آن، به صورت  $y = a + b\sqrt{c-x}$

است. مقدار  $a + bc$  کدام است ؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)



۲۵- اگر  $g(x) = 1 - f(x+2)$  و  $g^{-1}(x) = \sqrt{7-3x} - x$  باشد، حاصل  $f^{-1}(7)$  کدام است؟

- (۱) ۱۳      (۲) ۱۴      (۳) ۱۵      (۴) ۱۶

۲۶- تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{2x-1}$  و وارون آن، هر دو از نقطه‌ی به مختصات  $(3,1)$  می‌گذرند. طول

نقطه‌ی تلاقی  $f$  با نیمساز ربع اول کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$       (۲)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$       (۳)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$       (۴)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

۲۷- اگر  $f(x) = 3 - \sqrt{x-1}$  باشد، نمودار توابع  $f \circ f^{-1}$  و  $f^{-1} \circ f$  در پاره‌خط  $AB$

مشترکند. طول پاره‌خط  $AB$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$       (۲) ۲      (۳)  $2\sqrt{2}$       (۴) ۴

۲۸- اگر  $f(x) = 4\sqrt{x-4} + 1$  باشد، فاصله‌ی نقاط تقاطع نمودار  $f$  و  $f^{-1}$  چقدر است؟

- (۱) ۶      (۲) ۸      (۳)  $6\sqrt{2}$       (۴)  $8\sqrt{2}$

## اعمال روی توابع با زوج مرتب

(۱) اگر در یک تابع دو زوج با مولفه‌ی اول یکسان داده است، باید مولفه‌ی دوم آنها نیز برابر باشد.

(۲) اگر در یک تابع یک به یک دو زوج با مولفه‌ی دوم یکسان داده است، باید مولفه‌ی اول آنها نیز برابر باشد.

(۳) در تابع اکیداً صعودی اگر دو زوج مرتب متفاوت  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  داشته باشیم، با فرض  $x_1 > x_2$  باید  $y_1 > y_2$  باشد.

(۴) برای تشکیل تابعی که از انواع محاسبات (غیر از ترکیب و وارون) روی  $f$  و  $g$  به دست آمده، کافی است دو زوج مرتب با مولفه‌ی اول یکسان در  $f$  و  $g$  پیدا کنیم و عملیات را روی مولفه‌های دوم انجام دهیم. مثلاً:

$$(1,4) \in f, (1,-2) \in g \Rightarrow 2f + \frac{\sqrt{f}}{g+1} : (1, 2 \times 4 + \frac{\sqrt{4}}{-2+1}) \Rightarrow (1,6) \in 2f + \frac{\sqrt{f}}{g+1}$$

(۵) برای تشکیل  $f \circ g$ ، زوج  $(x, y)$  از  $g$  را با زوج  $(y, z)$  از  $f$  ترکیب کرده و زوج  $(x, z)$  را در  $f \circ g$  قرار می‌دهیم.

(۶) برای تشکیل  $f^{-1}$  از روی  $f$  کافی است، جای مولفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب را عوض کنیم.



۲۹- اگر رابطه‌ی  $f = \{(-1, 3), (3, -1), (a-1, b^2-10), (a-4, 3), (5-a, b-4)\}$  تابع یک به یک باشد مقدار  $a+b$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      ۶ (۶)

۳۰- اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$  و  $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$  دو تابع

باشند، برد تابع  $f - (g^{-1} \circ f)$  کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج ۹۸)

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)       $\{2, -1\}$  (۴)

## بخش‌پذیری و تقسیم چندجمله‌ای‌ها

### رابطه‌ی تقسیم :

$\begin{array}{r} f(x) \quad \overline{) p(x)} \\ \quad \quad \quad q(x) \\ \hline \quad \quad \quad r(x) \end{array}$	$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------

در این رابطه :  $Q(x)$  خارج قسمت ،  $R(x)$  باقی‌مانده هستند و اگر باقی‌مانده صفر نباشد، درجه‌ی  $R(x)$  کمتر از درجه‌ی  $q(x)$  است.

### باقی‌مانده‌ی تقسیم بر عبارت درجه اول

باقی‌مانده‌ی تقسیم  $f(x)$  بر عبارت درجه اول  $ax+b$  از قرار دادن ریشه‌ی آن در  $f$  به دست می‌آید

$$R(x) = f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

مثال : باقی‌مانده‌ی تقسیم  $x^3 + x + 2$  بر  $x - 2$  ؟

### باقی‌مانده‌ی تقسیم بر عبارت درجه دوم

مثال : باقی‌مانده‌ی تقسیم  $f(x) = x^4 + x$  بر  $x^2 - 3x + 2$  را بیابید.

**نکته :** مجموع ضرایب چندجمله‌ای  $f(x)$  برابر  $f(1)$  است.

۳۱- به ازای یک مقدار  $a$ ، چندجمله‌ای  $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ ، بر  $2x - 1$

بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌مانده  $P(x)$  بر  $x + 2$ ، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج ۹۹)

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۴ (۳)      ۶ (۴)       $-10$  (۱)



۳۲- اگر باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای  $f(x)$  بر  $x^2 - x + 1$  برابر  $4x + 1$  باشد، باقی مانده‌ی تقسیم  $f(x+2) + f(2x+2)$  بر  $x+1$  کدام است؟

- (۱) ۵      (۲) ۶      (۳) ۳      (۴) ۴

۳۳- باقی مانده‌ی تقسیم  $x^5 - 5x + 1$  بر  $x^2 + x - 2$  کدام است؟

- (۱)  $6x - 9$       (۲)  $-9x + 6$       (۳)  $3x - 6$       (۴)  $-6x + 3$

### چند اتحاد مهم

$$n \text{ عدد طبیعی} : a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$n \text{ عدد طبیعی فرد} : a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$n \text{ عدد طبیعی زوج} : a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

هر یک از این رابطه‌های یک بخش پذیری را نیز نتیجه می‌دهد. مثال :

$$a^7 - b^7 =$$

$$a^5 + b^5 =$$

$$a^4 - b^4 =$$

### آزمون

۳۴- در کدام گزینه،  $y$  تابعی از  $x$  نیست؟

(۱)  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$       (۲)  $x^2 + y^2 + 5 = 2x + 4y$

(۳)  $x = y - |2y|$       (۴)  $y^3 + 2y = x + 4$

۳۵- اگر  $f = \{(1, 3), (2, a+1), (4, 2a)\}$  یک تابع خطی

و  $g = \{(a-1, a+1), (3, a+2), (1, 2a)\}$  باشد، برد تابع  $g \circ f^{-1}$  کدام است؟

- (۱)  $\{4, 5\}$       (۲)  $\{5, 6\}$       (۳)  $\{4, 6\}$       (۴)  $\{4, 5, 6\}$

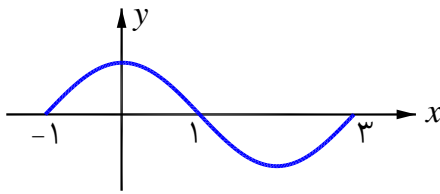
۳۶- اگر بازه‌ی  $(a, b)$  زیر مجموعه‌ی دامنه‌ی تعریف

تابع  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} + \log(20+x-x^2)$  باشد، بیشترین مقدار  $b-a$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴



۳۷- شکل روبه‌رو نمودار تابع  $y = f(x)$  است. دامنه‌ی تعریف تابع  $y = \sqrt{xf(1-2x)}$  کدام است؟



(۱)  $[-1, 0]$       (۲)  $[-1, 1]$

(۳)  $[-5, -1] \cup [0, 3]$       (۴)  $\{-1, 0, 1\}$

۳۸- اگر  $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$  و برد تابع  $g(x) = \sqrt{12 - f(3x-1)}$  بازه‌ی  $[a, b]$  باشد،  $b - a$  کدام است؟

(۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

۳۹- برد تابع  $f(x) = \sin^2 x + \cos x$  بازه‌ی  $[a, b]$  است. مقدار  $b - a$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$       (۲) ۲      (۳)  $\frac{5}{4}$       (۴)  $\frac{9}{4}$

۴۰- برد تابع  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$  یک بازه است. نقطه‌ی میانی این بازه کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{1}{3}$       (۳)  $-\frac{1}{2}$       (۴)  $-\frac{1}{3}$

۴۱- اگر توابع  $f$  و  $g$  به عنوان ماشین به صورت  $x^2 \rightarrow [g] \rightarrow [f] \rightarrow 2x-1$  باشند و مقدار  $f \circ g(2)$  کدام است؟

(۱) ۵      (۲) ۶      (۳) ۳      (۴) ۴

۴۲- اگر  $f(x) = x^2 + x$  باشد، خط  $y = 6$  نمودار تابع  $f \circ f$  را در نقاطی با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱) ۱ و ۲      (۲) ۱ و ۲-      (۳) ۱- و ۲-      (۴) ۱- و ۲

۴۳- اگر  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-x^2}$  باشند، دامنه‌ی تابع  $g \circ f$  کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج ۹۶)

(۱)  $[0, 1]$       (۲)  $[-1, 1]$

(۳)  $\mathbb{R}$       (۴)  $\mathbb{R} - (-1, 1)$

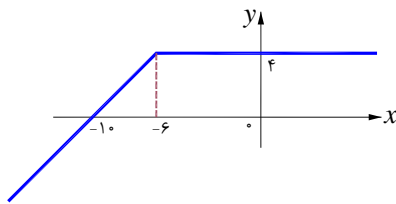
۴۴- اگر  $f(x) = 3 - 2x$  و برد تابع  $f$  بازه‌ی  $[-3, 13]$  باشد، دامنه‌ی تابع  $f \circ f$  کدام است؟

(۱)  $[-5, 3]$       (۲)  $[0, 3]$       (۳)  $[-23, 9]$       (۴)  $[-5, 9]$



۴۵- شکل روبه‌رو نمودار تابع  $y = f(-x + 2)$  است. مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار

تابع  $y = f(2x - 1) - 2$  با محورهای مختصات در ربع اول کدام است؟



۵ (۱)

۱۰ (۳)

۶ (۲)

۱۲ (۴)

۴۶- نمودار تابع  $y = f(x)$  در شکل روبه‌رو از تبدیل  $y = x^3$  به دست آمده است.

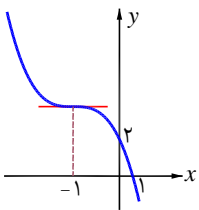
مقدار  $f(3)$  کدام است؟

-۱۸ (۱)

-۱۴ (۳)

-۱۶ (۲)

-۱۲ (۴)



۴۷- نقطه‌ی  $A(2, 5)$  روی نمودار تابع  $y = f(2x - 1) - a$  است. اگر انتقال یافته‌ی آن روی

نمودار تابع  $y = 3 - f(b - x)$  مبدأ مختصات باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟

۱ (۱)

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۴۸- دامنه و برد تابع  $y = f(x + 1) - 2$  به ترتیب بازه‌های  $[-2, 6]$  و  $[-4, 4]$  هستند.

اشتراک دامنه و برد تابع  $y = \frac{1}{4}f(-2x)$  شامل چند عدد صحیح است؟

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۴۹- اگر دامنه‌ی تعریف تابع  $y = f(2x + 1)$  بازه‌ی  $(1, \infty)$  باشد و  $g(x) = \frac{8}{\sqrt{x-1}} - 1$  و

دامنه‌ی تابع  $f \circ g$  بازه‌ی  $(a, b)$  باشد، مقدار  $b - a$  کدام است؟

۶۴ (۱)

۴ (۴)

۸ (۳)

۱۶ (۲)

۵۰- این تغییرات را به ترتیب روی نمودار تابع  $y = |x| + 1$  انجام می‌دهیم: انقباض افقی با

ضریب  $\frac{1}{4}$ ، ۱ واحد انتقال افقی به سمت چپ، قرینه نسبت به محور  $y$ ، قرینه نسبت به

محور  $x$ ، ۴ واحد انتقال عمودی به سمت بالا. طول یکی از نقاط برخورد نمودار حاصل با

نمودار تابع اصلی کدام است؟

$\frac{3}{2}$  (۱)

$\frac{5}{3}$  (۴)

$\frac{5}{2}$  (۳)

$\frac{4}{3}$  (۲)



۵۱- نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت بالا می‌بریم و سپس در امتداد محور  $x$  با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم. اگر معادله‌ی تابع حاصل به صورت  $y = \sqrt{2x-1} - 2$  باشد، نمودار تابع  $f$  محور  $x$  را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱۰ (۱)      ۲ (۲)       $\frac{1}{2}$  (۳)       $\frac{5}{2}$  (۴)

۵۲- نقطه‌ی  $A(x_0, y_0)$  واقع بر نمودار تابع  $y = f(2x) + 1$  است. با تبدیل این تابع به تابع  $y = 2f(x-1)$ ، نقطه‌ی  $A$  به کدام نقطه تبدیل می‌شود؟

(۱)  $(2x_0 - 1, 2y_0 + 2)$       (۲)  $(2x_0 + 1, 2y_0 - 2)$

(۳)  $(\frac{1}{2}x_0 - 1, \frac{1}{2}y_0 + 2)$       (۴)  $(\frac{1}{2}x_0 + 1, \frac{1}{2}y_0 - 2)$

۵۳- اگر  $f(x) = 2 - x + \sqrt{6-x}$  و دامنه‌ی تعریف تابع  $y = \sqrt{f(2x) - f(3-x)}$  بازه‌ی  $[a, b]$  باشد، مقدار  $b - a$  کدام است؟

- ۵ (۱)      ۲ (۲)      ۶ (۳)      ۴ (۴)

۵۴- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x - 3a & x \leq 1 \\ x^2 - ax & x > 1 \end{cases}$  در  $\mathbb{R}$  یک به یک باشد، محدوده‌ی تغییرات  $a$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $a \leq 1$       ۲  $1 \leq a \leq 2$       ۳  $a \geq 2$       ۴  $a \leq 1$  یا  $a \geq 2$

۵۵- اگر  $f = |x| - 3x$  باشد، مجموع طول نقاط تقاطع تابع  $y = f^{-1}(x)$  و  $y = 2 - |x|$  کدام است؟

- $\frac{2}{3}$  (۱)       $\frac{4}{3}$  (۲)       $\frac{8}{3}$  (۳)       $\frac{10}{3}$  (۴)

۵۶- وارون تابع  $f(x) = 16^x + 2^{2x+1}$  را به صورت  $f^{-1}(x) = \log_2^{u(x)}$  نوشته‌ایم. نمودار  $y = u(x)$ ، خط  $y = 3$  را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱۵ (۱)      ۱۷ (۲)      ۹۹ (۳)      ۱۰۱ (۴)

۵۷- اگر  $g(x) = x + \sqrt{4x-4}$  و  $f \circ g^{-1}(2x) = 3x - 1$  باشد،  $f^{-1}(5)$  برابر کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)





۵۸- اگر  $f(x) = x^2 - 2x; x \geq 1$  و  $g^{-1}(x) = 2x + 1$  باشد، محل تلاقی نمودار وارون تابع  $g^{-1} \circ f^{-1}$  با محور  $x$  کدام طول را دارد؟

- (۱) ۱      (۲) ۵      (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴)  $-\frac{1}{2}$

۵۹- وارون تابع  $f(x) = \frac{ax + a - 1}{x + 2a - 6}$  بر خودش منطبق است. مقدار  $f^{-1}(3)$  کدام است؟

- (۱) ۷      (۲) ۶      (۳) ۵      (۴) ۴

۶۰- تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = x - \frac{1}{2x}$  بر دامنه‌ی  $(0, +\infty)$  مفروض است. نمودار

تابع  $f^{-1}$  نیمساز ناحیه‌ی دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (سراسری تهرنی شارج ۹۹)

- (۱)  $-\frac{3}{2}$       (۲)  $-\frac{3}{4}$       (۳)  $-1$       (۴)  $-\frac{1}{2}$

۶۱- اگر  $f(x) = x^2 - x - 12$  و  $g(x) = \sqrt{12 + x}$  باشد، مجموع طول نقاط تقاطع نمودار

تابع  $f \circ g^{-1}$  با محور  $x$  ها کدام است؟

- (۱) ۶      (۲) ۷      (۳) ۸      (۴) ۹

۶۲- اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 1), (4, 1)\}$  و  $g(x) = x + 3$  و  $h = f + g$  باشد، کدام زوج مرتب

عضو تابع  $h \circ g$  نیست؟

- (۱)  $(-2, 6)$       (۲)  $(-1, 10)$       (۳)  $(0, 5)$       (۴)  $(1, 8)$

۶۳- اگر رابطه‌ی  $f = \{(4, 8), (a, 5), (3, 3a + 1), (a^2 - 2, 5), (1, b)\}$  تابع اکیداً یکنوا باشد،

مجموعه‌ی همهی مقادیر  $b$  کدام است؟

- (۱)  $b < 5$       (۲)  $b > 8$       (۳)  $b < -2$       (۴)  $b > 7$

۶۴- دو تابع  $f = \{(1, 3), (2, -3), (3, 0), (4, -1), (5, 1)\}$  و  $g(x) = 2x + 3$  مفروض‌اند.

اگر  $g^{-1} \circ f^{-1}(2a) = a + 1$  باشد، مجموع مقادیر ممکن برای  $a$  کدام است؟

- (۱)  $-1$       (۲)  $-2$       (۳)  $-3$       (۴)  $-4$

۶۵- اگر  $f(x) = x^4 + ax^3 - 1$  در تقسیم بر  $x + 1$  و  $x - 2$  به ترتیب باقی‌مانده‌ی ۱ و  $b$

داشته باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۵      (۲) ۶      (۳) ۳      (۴) ۴



۶۶- اگر چند جمله‌ای  $f(x)$  در تقسیم بر  $x+4$  و  $x-2$  به ترتیب باقی مانده‌ی ۱ و ۵- داشته

باشد، باقی مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای  $f(2x)+x$  بر  $x^2+x-2$  کدام است؟

$x+3$  (۱)       $x-3$  (۲)       $3-x$  (۳)       $-x-3$  (۴)

۶۷- اگر  $a^5 - b^5 = 82$ ،  $a^4 + b^4 = 34$  و  $a - b = 2$  باشند، حاصل  $a^3b + a^2b^2 + ab^3$

کدام است؟

$7$  (۱)       $8$  (۲)       $9$  (۳)       $10$  (۴)

۶۸- مجموعه‌ی  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  مفروض است. چند تابع  $f$  از  $A$  به  $A$  می‌توان تعریف کرد

که برای هر زوج  $(x, y)$  از  $f$ ، عدد  $x + y$  فرد باشد؟

$17$  (۱)       $31$  (۲)       $72$  (۳)       $108$  (۴)