

# کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل دهم : مثلثات

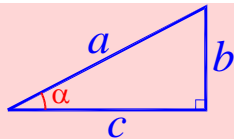
مهر داد عباسپور

## واحدهای اندازه گیری زاویه و روابط بین آنها

$$\text{زاویه ۱ رادیان} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$$

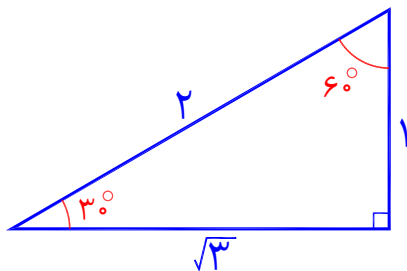
$$\text{رابطه‌ی بین درجه (D) و رادیان (R): } \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

## نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی حاده‌ی مثلث قائم‌الزاویه



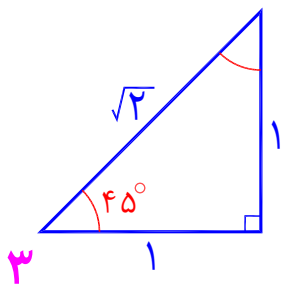
$$\sin \alpha = \frac{b}{a} \quad , \quad \cos \alpha = \frac{c}{a} \quad , \quad \tan \alpha = \frac{b}{c} \quad , \quad \cot \alpha = \frac{c}{b}$$

## نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه



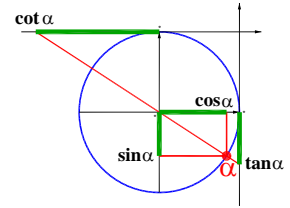
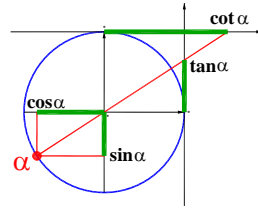
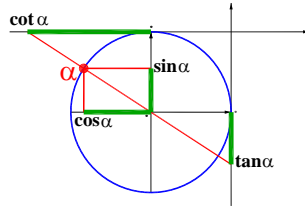
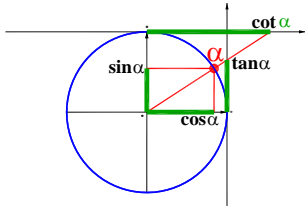
$$\begin{cases} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot 30^\circ = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan 60^\circ = \sqrt{3} \end{cases}$$

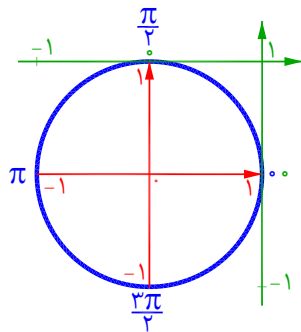


$$\begin{cases} \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1 \end{cases}$$

# نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های مختلف دایرهی مثلثاتی



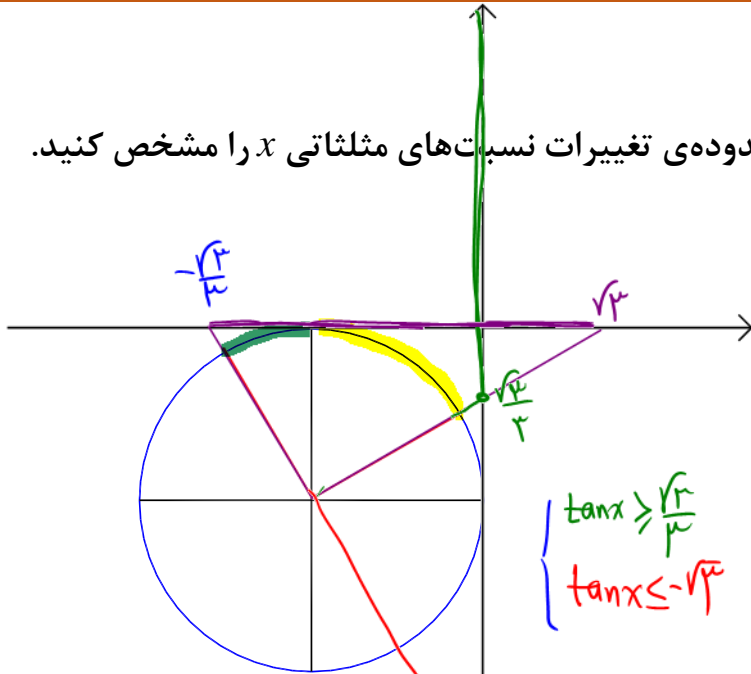
## نسبت‌های مثلثاتی در چهار نقطه‌ی مهم دایره‌ی مثلثاتی



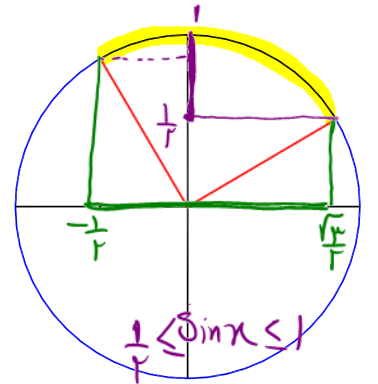
	$\alpha = 0$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$\alpha = \pi$	$\alpha = \frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	0	-1	0
$\tan \alpha$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده
$\cot \alpha$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0

## نامساوی‌های مثلثاتی

مثال: اگر حاصل  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$  باشد، محدوده‌ی تغییرات نسبت‌های مثلثاتی  $x$  را مشخص کنید.



$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cot x \leq \sqrt{3}$



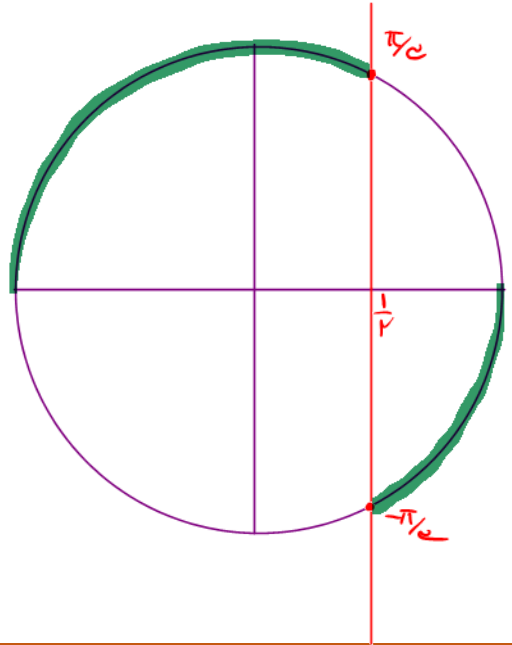
$-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$



مثال : نامعادلهی  $\frac{\sin x}{2\cos x - 1} < 0$  را حل کنید.

$$\begin{cases} \sin x < 0 \\ 2\cos x - 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \cos x > \frac{1}{2}$$

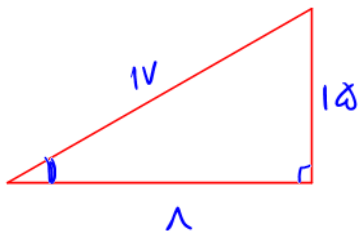
$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ 2\cos x - 1 < 0 \end{cases} \rightarrow \cos x < \frac{1}{2}$$





محاسبه‌ی سایر نسبت‌های مثلثاتی وقتی یکی از آنها معلوم است.

مثال : اگر  $\tan \theta = -\frac{15}{8}$  و  $\theta$  در ربع دوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را بیابید.




$$\sin \theta = +\frac{15}{17}$$

$$\cos \theta = -\frac{8}{17}$$


## نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه، متمم و مکمل

$\frac{\pi}{2} - \alpha$  متمم 

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha \end{cases}$$

$\pi - \alpha$  مکمل 

$$\begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha \end{cases}$$

قرینه 


$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) = -\cot \alpha \end{cases}$$

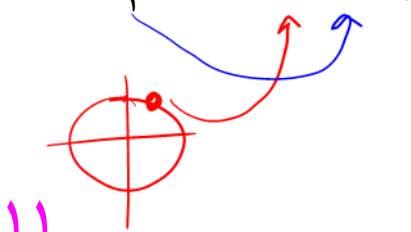
$$\begin{cases} \sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(k\pi + \alpha) = \tan \alpha \\ \cot(k\pi + \alpha) = \cot \alpha \end{cases}$$

در حالت کلی هرگاه به زاویه مضرب  $\pi$  اضافه شود، نام نسبت تغییر نمی کند و اگر مضرب فرد  $\frac{\pi}{2}$  اضافه شود، نام نسبت تغییر می کند (سینوس به کسینوس، تانژانت به کتانژانت و برعکس). علامت نیز از ناحیه‌ی آن مشخص می شود.

مثال :

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$


$$\tan\left(-\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = +\cot \alpha$$


مثال : حاصل  $\sin \frac{4\pi}{3}$  ،  $\cos 315^\circ$  ،  $\tan \frac{17\pi}{6}$  را بیابید.

$$\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

*Red annotations: A bracket under the angle is labeled  $\pi + \frac{\pi}{3}$ . A red arrow points from the angle to the negative sign in the result.*

$$\cos(315^\circ - 45^\circ) = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

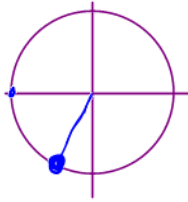
*Red annotations: A bracket under the angle is labeled  $315^\circ - 45^\circ$ . A red arrow points from the angle to the positive sign in the result.*

$$\tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

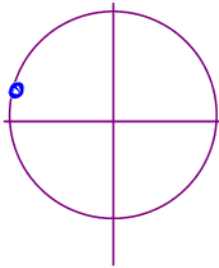
*Red annotations: A bracket under the angle is labeled  $2\pi - \frac{\pi}{6}$ . A red arrow points from the angle to the negative sign in the result.*

مثال : علامت  $\sin \frac{65\pi}{7}$  ،  $\cos 3$  ،  $\tan 1040^\circ$  را تعیین کنید.

$\nearrow 5^\circ$   
 $\sin(9\pi + \frac{4\pi}{7}) < 0$

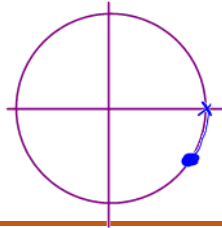


$\cos 3 < 0$



$$\left\{ \begin{array}{l} \mu^{rad} \cong 3 \times 57^\circ = 171^\circ \\ \frac{\pi}{2} < 3 < \pi \end{array} \right.$$

$\tan(4211^\circ - 5^\circ) < 0$



(سراسری ریاضی فارغ ۹۱)

$$\sqrt{3} \quad (۴)$$

۱- حاصل عبارت  $\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3}$  کدام است؟

$$۱ \quad (۳)$$

صفر  $(۲)$

$$-۱ \quad (۱)$$

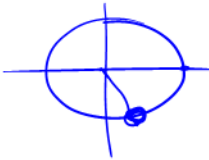
$$\tan\left(\underbrace{3\pi - \frac{\pi}{6}}_{\text{ربع ۳}}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

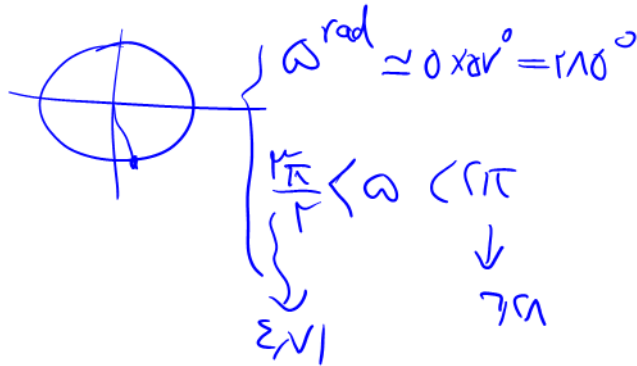
۲- مقادیر  $\cos(\delta)$  ،  $\tan(-777^\circ)$  به ترتیب کدامند؟

- (۱) مثبت ، مثبت      (۲) مثبت ، منفی      (۳) منفی ، مثبت      (۴) منفی ، منفی

$\tan(-777^\circ - 360^\circ) < 0$



$\cos(\delta) > 0$



۳- حاصل عبارت  $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$  با فرض  $\tan 15^\circ = 0,28$  کدام است؟

(سراسری تیرمی ۹۴)

$$-\frac{9}{16} \quad (2)$$

$$-\frac{16}{9} \quad (1) \quad \checkmark$$

$$\frac{16}{9} \quad (4)$$

$$\frac{9}{16} \quad (3)$$

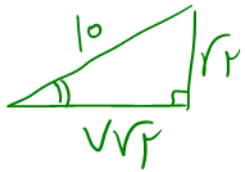
$$\frac{\cos(270^\circ + 15^\circ) - \sin(270^\circ - 15^\circ)}{\sin(360^\circ + 15^\circ - 10^\circ) - \sin(90^\circ + 15^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} \div \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$= \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} \approx \frac{0,28 + 1}{0,28 - 1} = -\frac{1,28}{0,72}$$

$$= -\frac{16}{9}$$





۱۴- اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ربع دوم دایرهی مثلثاتی و  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$  باشد، مقدار

کدام است؟  $\tan\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) + 10\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$

-۲۱ (۴)

۲۱ (۳)

-۷ (۲)

۷ (۱)

$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos \alpha$

$\tan\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$

حواص =  $-\cot \alpha + 10\sqrt{2} \cos \alpha$   
 $- 7 \quad - \frac{7\sqrt{2}}{10}$

$= +7 - 14 = -7$

۵- اگر  $\sin \alpha - \cos \alpha < 0$  و  $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$  آنگاه انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیهی دایره

مثلثاتی است؟

(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

(۴) چهارم

$$\tan \alpha + \cot \alpha < 0$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \rightarrow$$

مساوی  $\tan \alpha$  و  $\cot \alpha$

$$\rightarrow \tan \alpha < 0$$

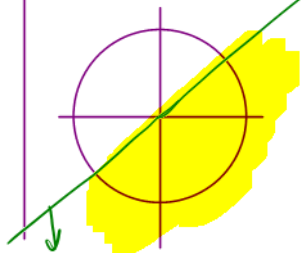


۱۸

$$\sin \alpha - \cos \alpha < 0$$

$$\sin \alpha < \cos \alpha$$

$$Y < X$$



$$y=x$$



چهارم

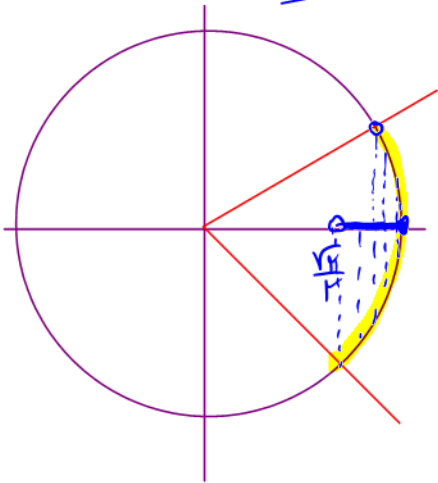
۶- برد تابع  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{6}$  ;  $f(x) = 12 \cos x$  شامل چند عدد صحیح است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leq 1$$

$$6\sqrt{3} < 12 \cos x \leq 12$$

$$R_f = \left( 6\sqrt{3}, 12 \right]$$

↕  
↕

→ ۹، ۱۱، ۱۲

## اتحادهای مثلثاتی

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x} \Rightarrow \tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\begin{cases} \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ \sin^8 x + \cos^8 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \end{cases}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

## نکته :

ارتباط بین  $\sin x \pm \cos x$  و  $\tan x + \cot x$  را بلد باشید.  
کافی است که  $\sin x \pm \cos x$  رو به توان ۲ برسونید.

**مثال :** اگر  $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $\tan x + \cot x$  را بیابید.

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$$

توان ۲  
↓

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$\sin x \cdot \cos x = -\frac{2}{9}$$

## اتجاهای مثلثاتی $2\alpha$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

تبدیل

از قبل بهرت صبار  
صبر صفا ملود

## اتحادهای مثلثاتی $\alpha \pm \beta$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \xrightarrow{\beta \rightarrow -\beta} \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \xrightarrow{\beta \rightarrow -\beta} \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \xrightarrow{\beta \rightarrow -\beta} \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

حواستون باشه که :

$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \quad , \quad \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

## ساده کردن $a \sin x + b \cos x$ :

کافی است که از  $\sqrt{a^2 + b^2}$  فاکتور بگیرید. مثلاً:

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$



## نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{\pi}{8} = 22.5^\circ$ و $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$ بدینجهت: $\sin$ و $\cos$ از فرمول‌ها زیر

استفاده کنید

محاسبه‌ی سینوس و کسینوس این زوایا از روابط نصف زاویه:

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

و یا روابط مجموع و تفاضل دو زاویه استفاده می‌کنیم:  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ ,  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

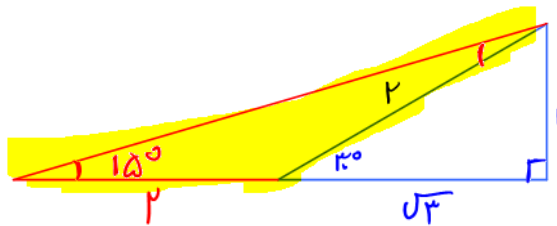
$$\alpha = 10^\circ \left\{ \begin{array}{l} \cos 20^\circ = 2\cos^2 10^\circ - 1 \rightarrow \frac{r}{r} = 2\cos^2 10^\circ - 1 \rightarrow \cos^2 10^\circ = \frac{r+1}{2} \quad \cos 10^\circ = \frac{\sqrt{r+1}}{2} \\ \cos 20^\circ = 1 - 2\sin^2 10^\circ \rightarrow \frac{r}{r} = 1 - 2\sin^2 10^\circ \rightarrow \sin^2 10^\circ = \frac{r-1}{2} \quad \sin 10^\circ = \frac{\sqrt{r-1}}{2} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{r+1} = \sqrt{\frac{r+1}{2}} = \sqrt{\frac{(r+1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{r+1}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{\sqrt{r+1}}{r}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi}{2} = 2\cos^2 \frac{\pi}{4} - 1 = \sqrt{r} \rightarrow \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{r+1}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{4} = \sqrt{r} \rightarrow \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{r-1}}{2} \end{array} \right.$$

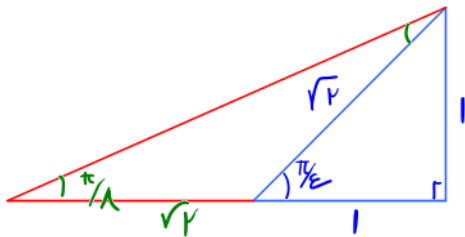
۲۵

محاسبه‌ی تانژانت این زوایا با شکل :



$$\tan \alpha^\circ = \frac{1}{r + \sqrt{r}}$$

$$\tan \alpha^\circ = r - \sqrt{r}$$



$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{r} + 1} = \sqrt{r} - 1$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$$

۷- اگر  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  باشد، حاصل عبارت  $(\frac{1}{\sin x} - \sin x)$  ،  $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$  کدام است؟

(سراسری تجربی خارج ۹۱)

۲)  $-\cos x$

۱)  $-\cos^2 x$  ✓

۴)  $\cos x$

۳)  $\cos^2 x$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \times \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} = \frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\cos x}} \times \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\sin x}} \cdot \frac{1}{|\cos x|}$$

$$= \cos x \cdot |\cos x| \cdot \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\sin x}} \rightarrow -\cos^2 x$$

اگر  $2\sqrt{3}$  باشد، حاصل  $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x} = 2\sqrt{3}$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

$$\frac{\sin x \cdot \sin x + (1 - \cos x)^2}{\sin x (1 - \cos x)} = 2\sqrt{3} \rightarrow \frac{\sin^2 x + 1 + \cos^2 x - 2 \cos x}{\sin x (1 - \cos x)} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\cancel{1} - \cancel{\cos^2 x}}{\sin x (1 - \cos x)} = 2\sqrt{3} \rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 3$$

۹- اگر  $\frac{6 + \sin^2 x}{1 + \cos^2 x} = 5$  باشد، مقدار  $\tan^2 x + \cot^2 x$  چقدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۳/۵ (۲)

۲/۵ (۱) ✓

$$4 + \sin^2 x = 5(1 + 1 - \sin^2 x) \rightarrow 4 + \sin^2 x = 10 - 5\sin^2 x \rightarrow 4\sin^2 x = 6$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{2} \rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan^2 x = 3$$

$$\Rightarrow \cot^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 + \frac{1}{3}$$

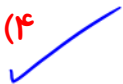
۱۰- اگر  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = a$  و  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = 3a - 1$  باشند، مقدار  $a$  کدام است؟

۴ (۴)

۳/۵ (۳)

۳ (۲)

۲/۵ (۱)



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = 3a - 1 \\ \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{1}{a} \end{array} \right. \xrightarrow{x} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{3a - 1}{a}$$

$$\frac{3a - 1}{a} = 1 \rightarrow a = 1$$

۱۱- اگر  $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  باشد، حاصل  $\cos 4x$  کدام است؟

$$\frac{5}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۱)$$

$$\begin{aligned}\cos 4x &= \cos^2(2x) \\ &= 1 - 2\sin^2(2x) \\ &= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

توان ۲  
↓

$$1 - 2 \underbrace{\sin^2 2x}_{\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}$$

$$\sin^2 2x = \frac{2}{3}$$



۱۲- برای کدام  $x$  بر حسب درجه تساوی  $\sin x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8}$  برقرار است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳) ✓

۹ (۲)

۸ (۱)

$x \cos x$  →

$$\underbrace{\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x}_{\frac{1}{8} \sin 2x} = \frac{1}{8} \cos x \rightarrow \frac{1}{8} \sin 2x = \frac{1}{8} \cos x$$

$$\rightarrow \sin 2x = \cos x$$

$$2x + x = 90^\circ \rightarrow x = 30^\circ$$

۱۳- حاصل  $1 - (2\sin^2 x - 1)^2$  به ازای  $x = \frac{\pi}{24}$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲) \quad \text{---} \cos 2x$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x = \cos \pi/12 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۴- مقدار  $\tan \frac{5\pi}{12}$  برابر کدام است؟

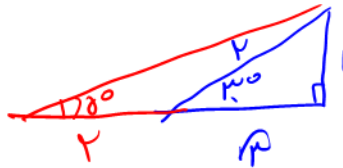
$$3 + \sqrt{3} \quad (۴)$$

$$2 + \sqrt{3} \quad (۳)$$

$$3 + \sqrt{2} \quad (۲)$$

$$2 + \sqrt{2} \quad (۱)$$

$$\tan\left(\frac{4\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2 + \sqrt{3}}{1}$$



$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

۱۵- حاصل  $2 \tan 2x - \cot x + \tan x$  به ازای  $x = \frac{\pi}{24}$  برابر کدام است؟

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (۴)$$

$$-\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (۳)$$

$$4\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$-4\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$-(\cot x - \tan x - 2 \tan 2x) = -4 \cot x$$

$$-(2 \cot 2x - 2 \tan 2x)$$

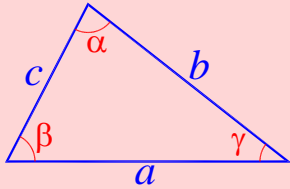
$$-2(\cot 2x - \tan 2x)$$

$$2 \cot 2(2x)$$

$$= -4 \cot \frac{\pi}{6}$$

$$= -8(\sqrt{3})$$

## کاربرد مثلثات در هندسه



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

قضیه سینوس‌ها :

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

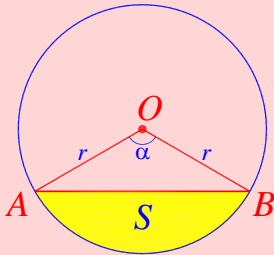
قضیه مساحت :

~~$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$~~

قضیه کسینوس‌ها :

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

مساحت چهارضلعی با قطرهای  $a$  و  $b$  که زاویه بین دو قطر  $\alpha$  باشد :



$$AB \text{ کمان طول} = \frac{\alpha}{2\pi} \times \text{محیط دایره} = \frac{\alpha}{2\pi} \times 2\pi r = r\alpha$$

رادیان

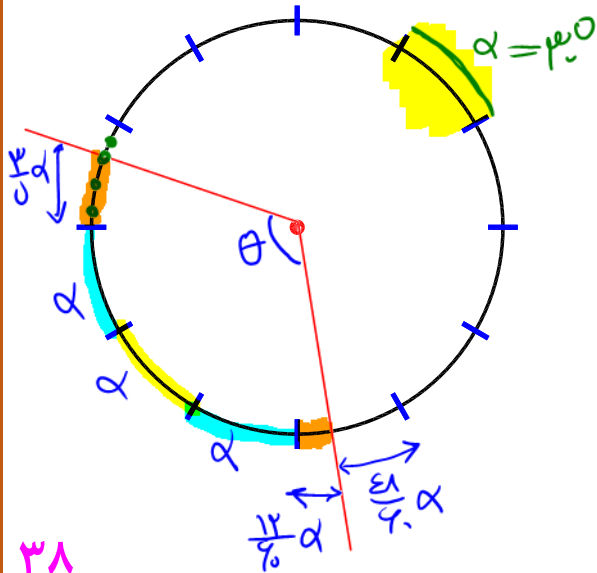
$$OAB \text{ قطاع مساحت} = \frac{\alpha}{2\pi} \times \text{مساحت دایره} = \frac{\alpha}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\alpha$$

$$\text{مساحت مثلث } ABO - \text{مساحت قطاع} = S = \text{مساحت ناحیهی سایه زده}$$

$\frac{1}{2}r \cdot r \sin \alpha$

# زاویہی بین عقربہ‌های ساعت

مثال : ساعت ۵:۴۸



$$\begin{aligned}\theta &= 3\alpha + \frac{3}{2}\alpha + \frac{11}{6}\alpha \\ &= 90^\circ + 11^\circ + 9^\circ = 115^\circ\end{aligned}$$

۱۶- در مثلث  $ABC$  با زوایای حاده، اگر مساحت برابر ۴۸ ،  $AC = ۱۸$  و  $AB = ۸$  باشد، مقدار

تقریبی  $\cot \hat{A}$  برابر چقدر است ؟

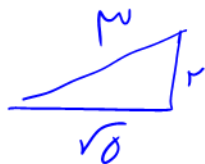
۱/۷ (۴)

۱/۵ (۳)

۱/۳ (۲)

۱/۱ (۱) ✓

$$S = \frac{1}{2} \times 18 \times 8 \sin \hat{A} = 48 \rightarrow \sin \hat{A} = \frac{2}{3}$$



$$\cot \hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx \frac{2.2}{2} = 1.1$$

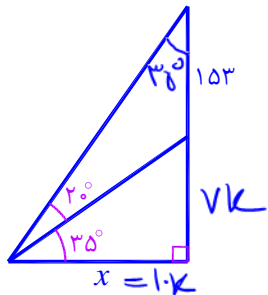
۱۷- در شکل روبه‌رو  $x$  چقدر است؟ ( $\tan 35^\circ \approx 0,7$ )

۲۱۰ (۲) ✓

۲۰۰ (۱)

۲۳۰ (۴)

۲۲۰ (۳)



$$\tan 20^\circ = \frac{v}{10} = \frac{vk}{10k}$$

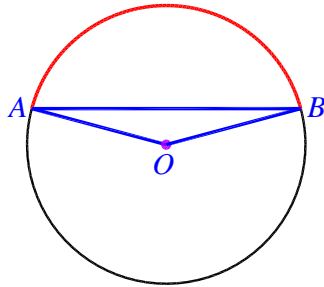
$$\tan 35^\circ = \frac{10k}{vk + 10k} = \frac{v}{10} \rightarrow 9k + v \times 10k = 10k$$

$$0k = v \times 10k \rightarrow k = 21$$

$$n = 21.$$



۱۸- در شکل روبه‌رو طول کمان  $AB$  برابر  $\pi$  و  $AOB = 150^\circ$  باشد، مساحت مثلث  $AOB$  چقدر است؟



○/۴۲ (۲)

○/۳۶ (۱) ✓

○/۶۴ (۴)

○/۴۸ (۳)

$$l_{AB} = \frac{150^\circ}{180^\circ} \times \cancel{\pi R} = \pi \rightarrow R = \frac{4}{3}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \sin 150^\circ = \frac{4}{9} = 0.44$$

## توابع متناوب

تابع  $f$  را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند  $T$  موجود باشد به طوری که برای هر  $x \in D_f$  داشته باشیم:

$$x \pm T \in D_f \quad , \quad f(x \pm T) = f(x)$$

کوچک‌ترین عدد مثبت  $T$  با این خاصیت را دوره تناوب  $f$  می‌نامیم.

قضیه: اگر دوره تناوب تابع  $y = f(x)$  برابر  $T$  باشد، دوره تناوب تابع  $y = Af(ax+b) + B$  که  $a$  عددی غیر صفر است برابر  $\frac{T}{|a|}$  است.

## دوره تناوب چند تابع مهم :

$n$ فرد : $\sin^n x$ , $\cos^n x$	$T = 2\pi$
$n$ زوج : $\sin^n x$ , $\cos^n x$ , $ \sin x $ , $ \cos x $	$T = \pi$
$\tan^n x$ , $\cot^n x$	$T = \pi$

$y = 2 \sin^2 \left( 4x + \frac{\pi}{6} \right) - 3$ 
 $T = \frac{\pi}{2}$

مثال :

$y = 4 \sin^3 3x \cos 3x - \sin 6x$

$= 4 \sin^2 3x \cdot \sin 3x \cos 3x - \sin 6x = \sin 6x (\sin^2 3x - 1)$

$43 \quad T = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

$= -\sin 6x \cos 6x = -\frac{1}{2} \sin 12x$

مثال :

۱۹- دوره تناوب تابع  $f(x) = \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x$  کدام است؟

$\pi$  (۴)

$\frac{\pi}{2}$  (۳)

$\frac{\pi}{4}$  (۲)

$\frac{\pi}{8}$  (۱)

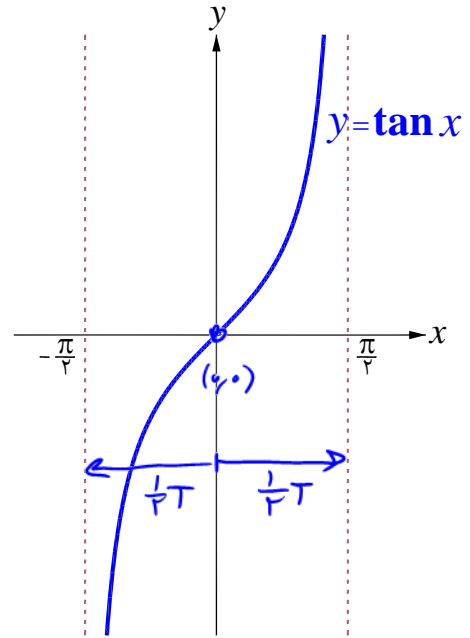
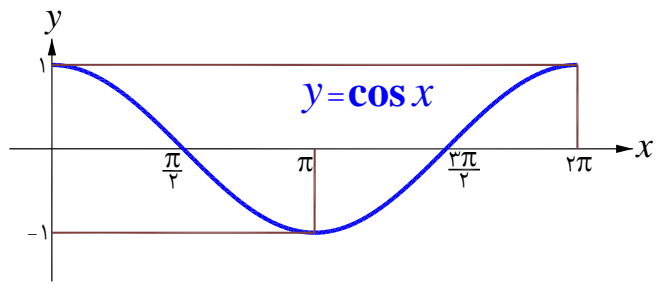
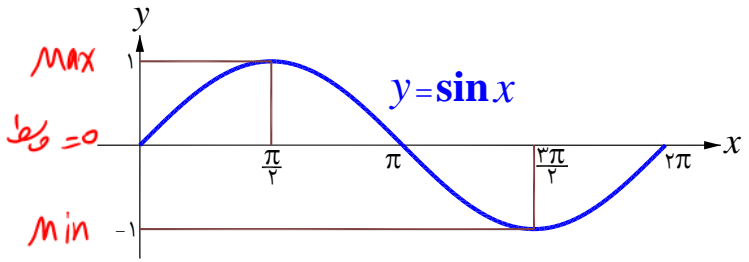
$$f(x) = \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x$$

$$= \frac{1}{4} \sin 4x (-\cos 4x)$$

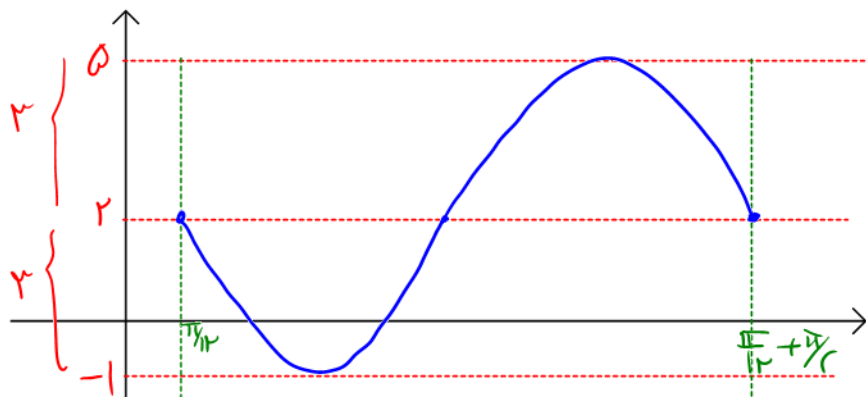
$$= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \sin 8x$$

$$T = \frac{2\pi}{8}$$

# نمودار توابع مثلثاتی



مثال : نمودار تابع  $y = 2 - 3 \sin(4x - \frac{\pi}{3})$  را رسم کنید.



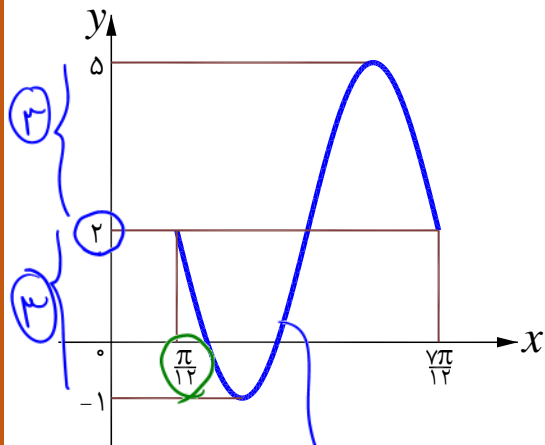
$x = \frac{\pi}{12}$

$4x - \frac{\pi}{3} = 0$



$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

مثال : نمودار روبه‌رو مربوط به یک تابع تبدیل یافته از  $y = \sin x$  است. معادله‌ی آن را بنویسید.

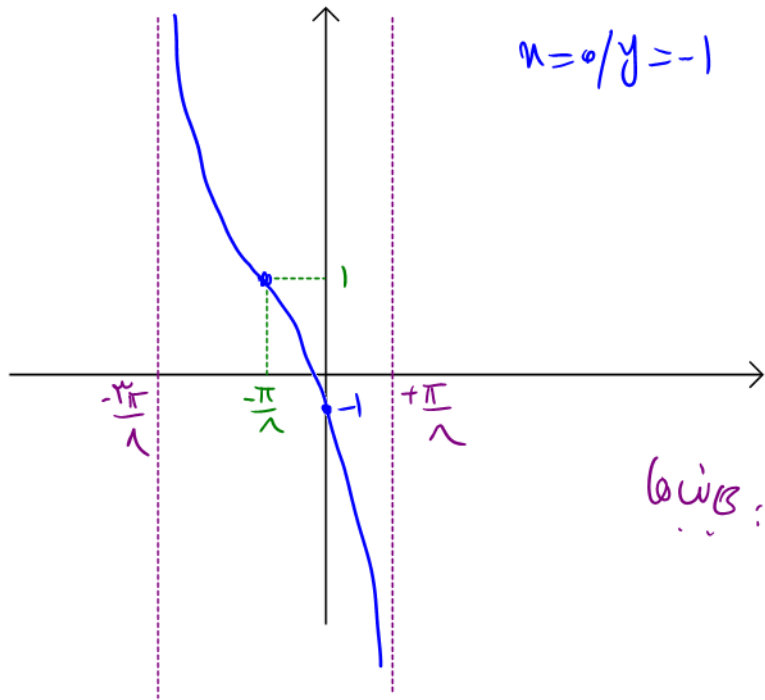


$$y = 2 - 3 \sin \left( \varepsilon \left( x - \frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$y = 2 - 3 \sin \left( \varepsilon x - \frac{\pi}{12} \right)$$

$$y = 2 + 3 \sin \left( -\varepsilon x + \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\leftarrow T = \frac{\sqrt{11}}{12} \quad -\frac{11}{12} = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{n} \rightarrow n = \varepsilon$$



$$x=0/y=-1$$

مثال :  $y = 1 - 2 \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$2x + \frac{\pi}{4} = 0 \quad x = -\frac{\pi}{8}$$

↓  
دوریع

$$y = 1 - 0 = 1$$

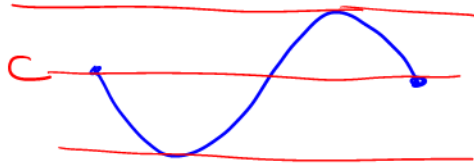
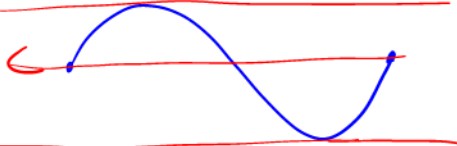
$$T = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{بویس: } x_0 \pm \frac{1}{2} T = -\frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{8} \left( \begin{array}{l} -\frac{3\pi}{8} \\ \frac{\pi}{8} \end{array} \right)$$

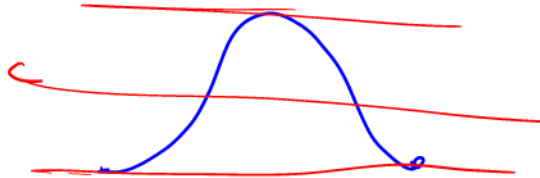
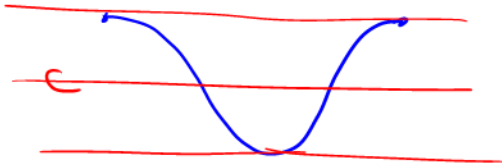


توابع  $f(x) = a \cos bx + c$  و  $f(x) = a \sin bx + c$

$c + |a|$



$c - |a|$



$$\text{Max} = c + |a| / \text{Min} = c - |a|$$

۲۰- در تابع  $f(x) = a \sin bx + c$  ماکسیمم برابر ۷ و مینیمم برابر -۱ است. اگر تابع از نقطه‌ی  $(\frac{\pi}{4}, 1)$

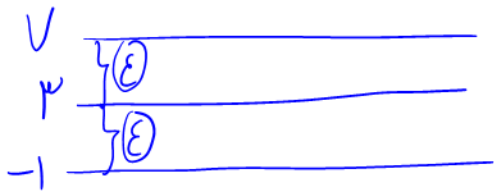
بگذرد، بزرگترین عدد ممکن برای دوره تناوب کدام است؟

$4\pi$  (۴)

$3\pi$  (۳) ✓

$2\pi$  (۲)

$\pi$  (۱)



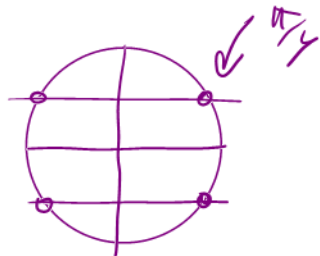
$$f(x) = 3 \pm 4 \sin bx \quad (b > 0)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow 3 \pm 4 \sin \frac{b\pi}{4} = 1$$

$$\sin \frac{b\pi}{4} = \pm \frac{1}{4}$$

$$\frac{b\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$$

$$b = \frac{2}{3}$$

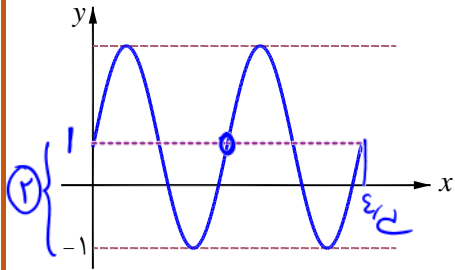


$$T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi$$

۵۰

۲۱- شکل زیر نمودار تابع  $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ ، در بازه‌ی  $(0, \frac{4}{3})$  است.  $a + b$  کدام است؟

(سراسری ریاضی فارغ ۹۷)



$$2T = \frac{4}{3} \rightarrow T = \frac{2}{3}$$

۴ (۲)

۳ (۱)

$$\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{3} \rightarrow b = 3$$

۶ (۴)

۵ (۳)

$$n=0 \rightarrow y=1$$

$$|a| = 2$$

$$\rightarrow a = 2$$

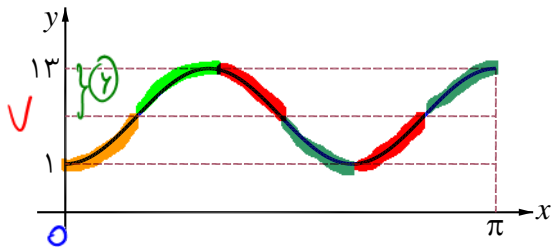
نمودار  $\rightarrow +\sin$

$$a = -2 / b = -3$$

۵۱

۲۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع  $f$  است که از تبدیل نمودار  $y = \cos x$  به دست آمده است. مقدار

$f\left(\frac{5\pi}{9}\right)$  کدام است؟



$$\frac{9}{\varepsilon} T = \pi$$

۹ (۲)

۱۰ (۱)

۴ (۴)

۵ (۳)

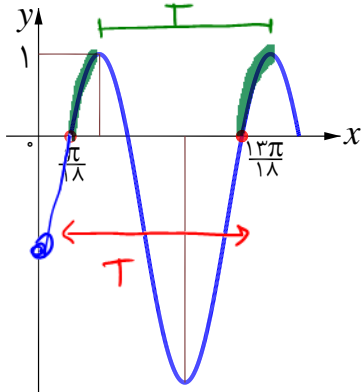
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$$

$$y = V - 9 \cos(8x)$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5\pi}{9}\right) &= V - 9 \cos\left(\frac{5\pi}{9} \cdot 8\right) \\ &= V - 9 \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{9}\right) \\ &= V - 9 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

۲۳- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = a - 2\cos\left(bx + \frac{\pi}{4}\right)$  است.  $a + b$  کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۵)



$$y = a + 2\sin(bx)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$2 \quad (4)$$

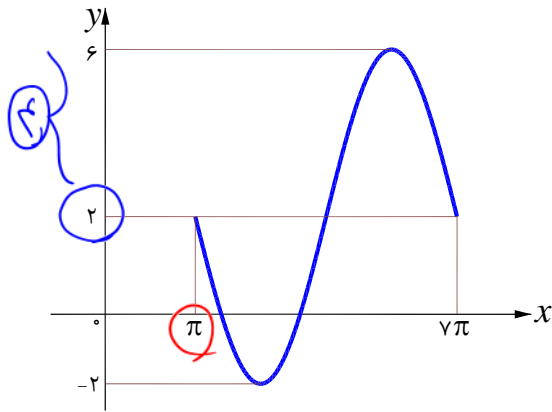
$$\frac{2}{2} \quad (3)$$

$$T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{b}$$

$$b > 0 \rightarrow b = 3$$

$$\max = a + |-2| = 1 \rightarrow a = -1$$

۲۴- شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع  $f(x) = a \sin(bx + c) + d$  است. مقدار  $f\left(\frac{27\pi}{2}\right)$  کدام است؟



۲ (۲) ✓ صفر

۴ (۴) ۳ (۳)

$$y = 2 - 4 \sin\left(\frac{1}{3}(x - \pi)\right)$$

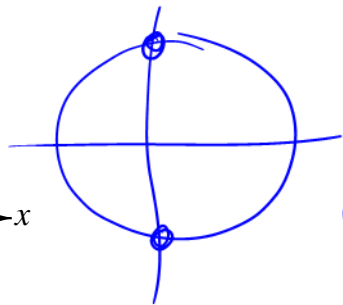
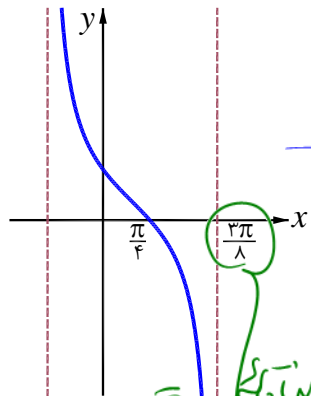
$$T = 7\pi - \pi = 6\pi = \frac{6\pi}{n} \rightarrow n = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = 2 - 4 \sin\left(\frac{x - \pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{27\pi}{2}\right) = 2 - 4 \sin\left(\frac{27\pi - \pi}{9}\right) \rightarrow 2 - 4 \sin\left(\frac{26\pi}{9}\right)$$

$$= 2 - 4\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

۲۵- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = b - \tan(ax - \frac{\pi}{4})$  است. مقدار  $a + b$  کدام است؟



↓  
a) ۰

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

$$a\pi - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$a\pi = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\hookrightarrow k=0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2a}$$

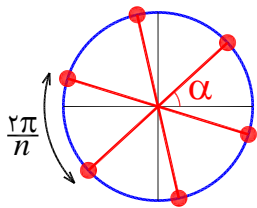
مقدار  $x = \frac{3\pi}{8}$  در  $x = \frac{\pi}{2a}$  قرار می‌دهیم

$$\rightarrow \frac{\pi}{2a} = \frac{3\pi}{8} \rightarrow a = 1$$

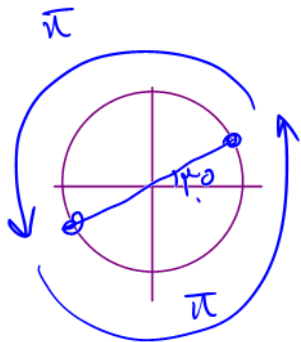
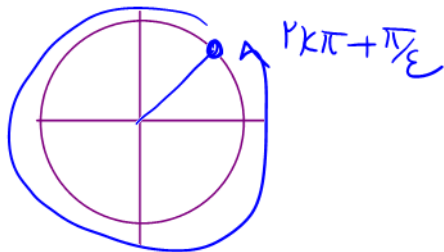
$$f(x) = b - \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

۵۵  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow b - \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \rightarrow b = 1$

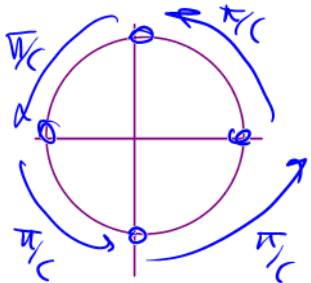
اعداد مربوط به  $n$  نقطه روی دایره‌ی مثلثاتی با فاصله‌های مساوی :



$$\frac{2\pi}{n}k + \alpha$$



$$k\pi + \frac{\pi}{2}$$

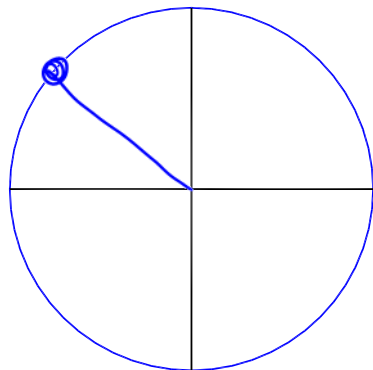


$$\frac{k\pi}{2} + 0$$



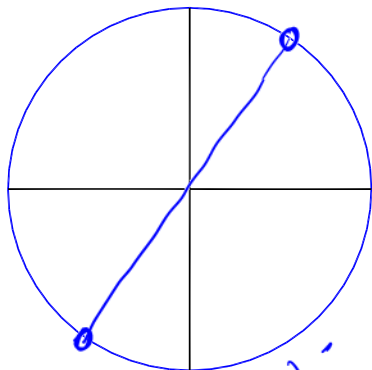
مثال :

$$2k\pi + \frac{3\pi}{4}$$



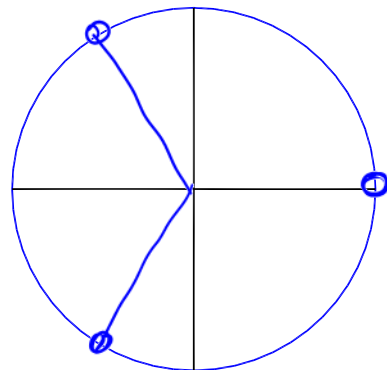
$$2\pi = k \text{ جزیب } \rightarrow \text{بندگم}$$

$$k\pi + \frac{\pi}{2}$$

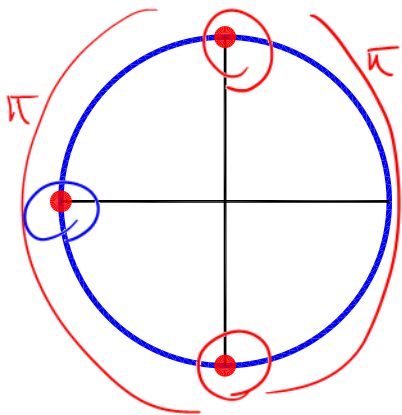


$$k \text{ جزیب } = \pi \rightarrow \text{بندگم}$$

$$\frac{2k\pi}{2}$$

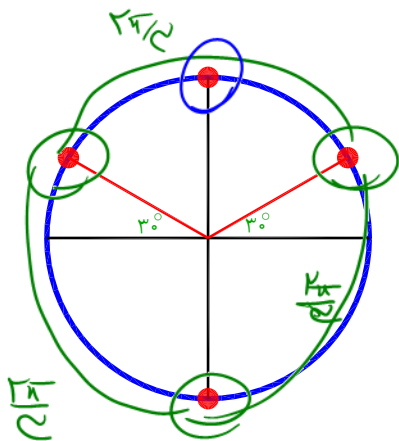


$$k \text{ جزیب } = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ بندگم}$$



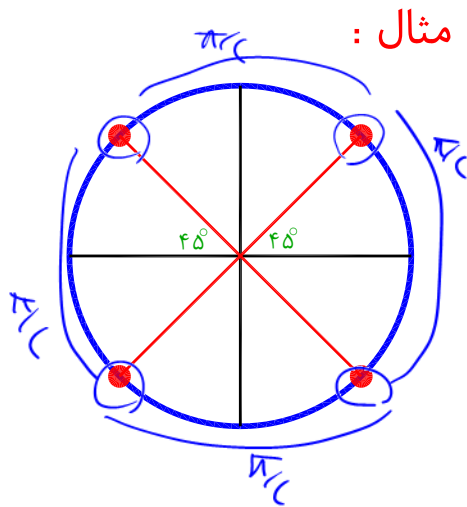
$$K\pi + \pi/r$$

$$rK\pi + \pi$$



$$rK\pi + \pi/2$$

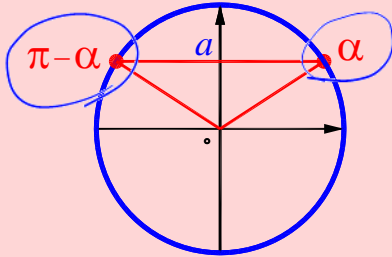
$$rK\pi + \pi/r$$



$$K\pi/r + \pi/c$$

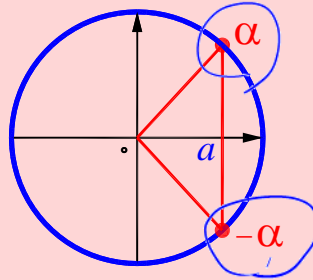
# معادلات مثلثاتی

$$\sin x = a = \sin \alpha$$



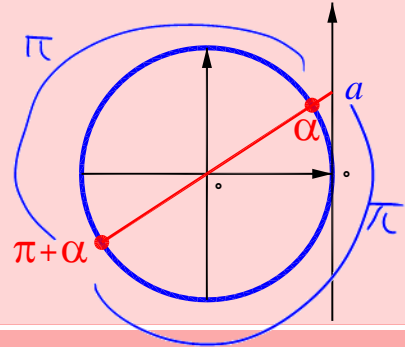
$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha & \checkmark \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha & \checkmark \end{cases}$$

$$\cos x = a = \cos \alpha$$



$$\checkmark x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$\tan x = a = \tan \alpha$$

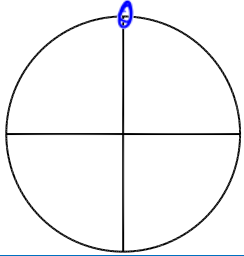


$$x = k\pi + \alpha$$

درک نیست

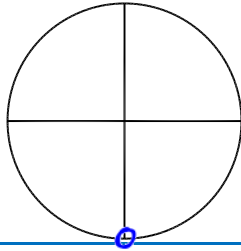
## چند معادله معروف :

$$\sin x = 1$$



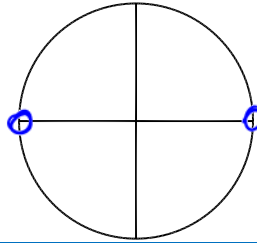
$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = -1$$



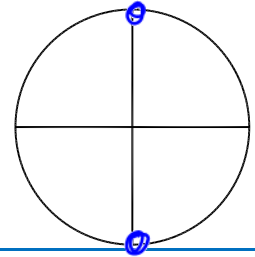
$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = 0$$



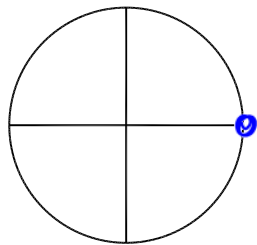
$$x = k\pi$$

$$\sin^2 x = 1$$



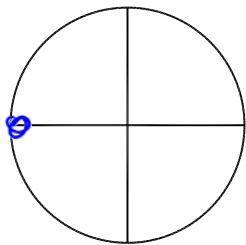
$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = 1$$



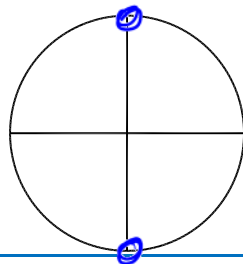
$$x = 2k\pi$$

$$\cos x = -1$$



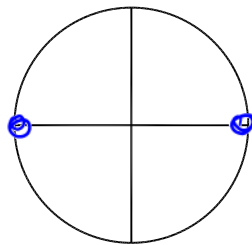
$$x = 2k\pi + \pi$$

$$\cos x = 0$$

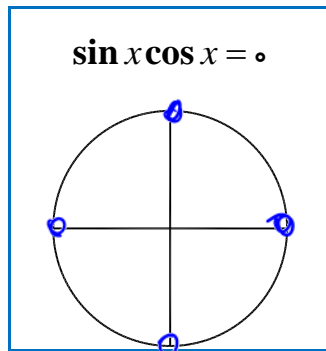


$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

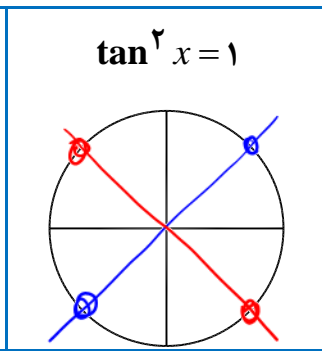
$$\cos^2 x = 1$$



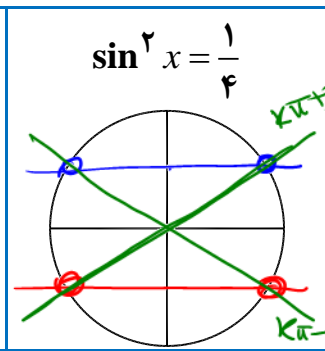
$$x = k\pi$$



$$x = \frac{k\pi}{1}$$

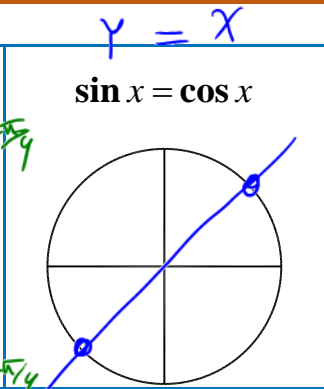


$$x = \frac{k\pi}{1} + \frac{\pi}{4}$$



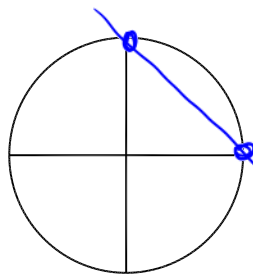
$$\sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$



$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\sin x + \cos x = 1$$



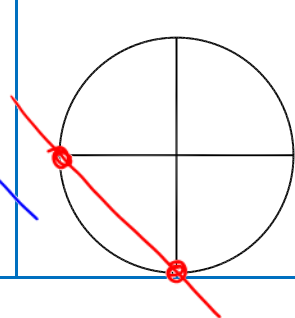
$$Y + X = 1$$

$$Y = -X + 1$$

$$x = 2k\pi$$

$$x = 2k\pi + \pi/2$$

$$\sin x + \cos x = -1$$



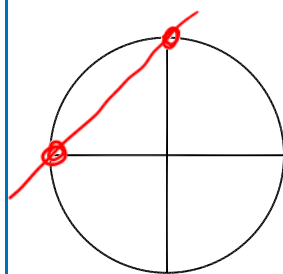
$$Y + X = -1$$

$$Y = -X - 1$$

$$x = 2k\pi + \pi$$

$$x = 2k\pi - \pi/2$$

$$\sin x - \cos x = 1$$



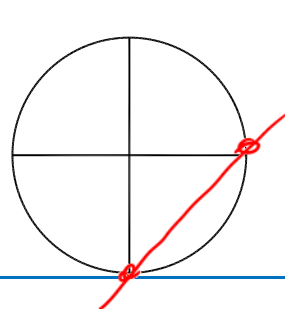
$$Y - X = 1$$

$$Y = X + 1$$

$$x = 2k\pi + \pi/2$$

$$x = 2k\pi + \pi$$

$$\sin x - \cos x = -1$$



$$Y - X = -1$$

$$Y = X - 1$$

$$x = 2k\pi$$

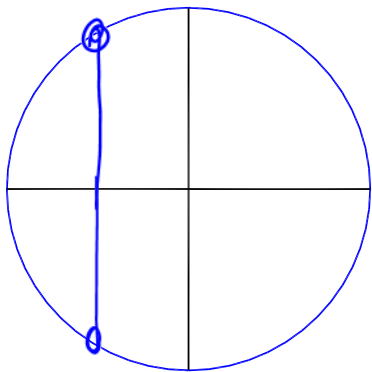
$$x = 2k\pi - \pi/2$$

مثال :  $2\cos 2x = 4\cos x + 1$

$$2(2\cos^2 x - 1) = 4\cos x + 1$$

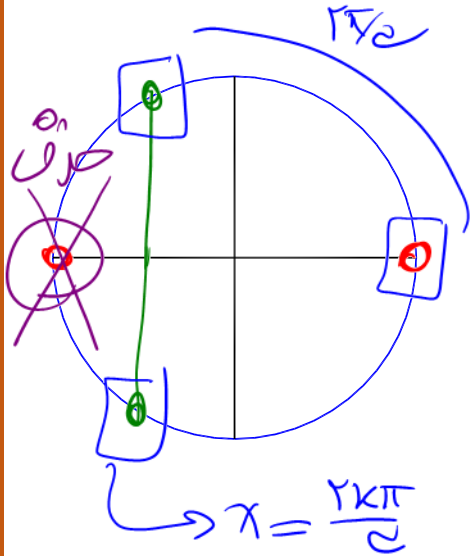
$$4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} & \times \\ \cos x = -\frac{1}{2} & \rightarrow x = k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$





$$\frac{\sin x(2\cos x + 1)}{\cos x + 1} = 0 \quad \text{مثال :}$$



$$\sin x = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x \neq -1$$

نکته مهم :

برای حل معادلاتی که به صورت‌های زیر هستند، دو طرف را هم نام و هم علامت کنید و بعد از روابط اصلی معادلات استفاده کنید.

$$\sin u = \pm \sin v , \cos u = \pm \cos v , \sin u = \pm \cos v$$

$$\tan u = \pm \tan v , \cot u = \pm \cot v , \tan u = \pm \cot v$$

توجه کنید که پس از حل معادلاتی شامل  $\tan$  و  $\cot$  حتماً باید توجه کنیم که جواب‌های به دست آمده در دامنه‌ی تعریف آنها قرار بگیرند.

$$\sin u = \sin v \rightarrow u = 2k\pi + v , u = 2k\pi + \pi - v$$

$$\cos u = \cos v \rightarrow u = 2k\pi \pm v$$

مثال :  $\sin 3x + \sin x = 0$

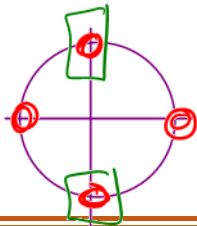
$$\sin 3x = -\sin x$$

$$\sin 3x = \sin(-x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x = 2k\pi + (-x) \\ 3x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{array} \right.$$

٢٧

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$



$$\bigcup x = \frac{k\pi}{2}$$

مثال :  $\sin 2x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - (x + \frac{\pi}{4})\right)$$

$$\sin 2x = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi - x + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-x + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

مثال :  $\cot 2x = \tan x$

۲۶- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $۴ \sin x \sin\left(\frac{۳\pi}{۲} - x\right) = ۱$  ، در بازه‌ی  $[۰, ۲\pi]$  کدام است ؟

(سراسری تیرگی ۹۱)

$$\underbrace{۴ \sin x \sin\left(\frac{۳\pi}{۲} - x\right)}_{-۴ \cos x}$$

$۳\pi$  (۲)

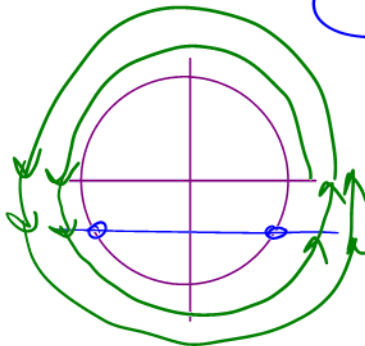
$\frac{۵\pi}{۲}$  (۱)

$۵\pi$  (۴)

$۴\pi$  (۳)

$$-۴ \left(\frac{1}{۲} \sin ۲x\right) = ۱$$

$$\sin ۲x = -\frac{1}{۲}$$



$$0 \leq x \leq ۲\pi$$

$$0 \leq ۲x \leq ۴\pi$$

$$۲x = \pi + \frac{\pi}{۶}, ۲\pi - \frac{\pi}{۶}, ۳\pi + \frac{\pi}{۶}, ۴\pi - \frac{\pi}{۶}$$

$$\oplus \rightarrow \sum ۲x_i = 10\pi \rightarrow \sum x_i = ۵\pi$$

۷۰

۲۷- مجموعه جواب معادله  $\cos 2x = 3 \sin x - 1$  روی دایره ی مثلثاتی کدام است ؟

(۱) رئوس مثلث متساوی الاضلاع

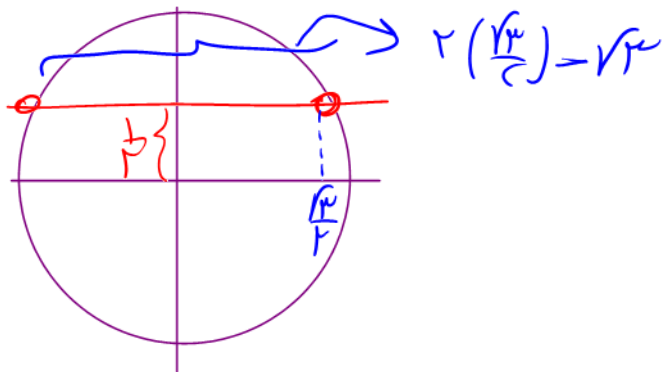
(۲) رئوس مستطیل

(۳) دو نقطه با فاصله ۱

(۴) دو نقطه با فاصله  $\sqrt{3}$

$$1 - 2 \sin^2 x = 3 \sin x - 1 \rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2} \quad X \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$



(سراسری ۱۳)

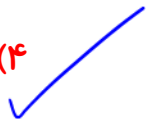
۲۸- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$  به کدام صورت است؟

$k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)

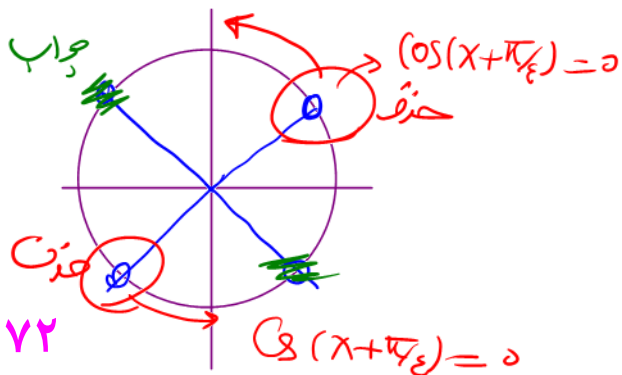
$k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)

$k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۲)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۱)



$\cos 2x = 0$    $2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$



$x = k\pi - \frac{\pi}{4}$



۲۹- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  کدام

است؟

(سراسری ریاضی ۹۸)

$3\pi$  (۴)

$2\pi$  (۳)

$\frac{7\pi}{2}$  (۲)

$\frac{5\pi}{2}$  (۱)

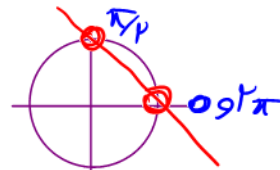
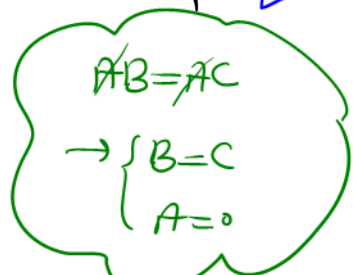
$$(\sin x + \cos x) \left( \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - \underbrace{\sin x \cos x}_{\frac{1}{2} \sin 2x} \right) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x) \left( 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \right) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\sin x + \cos x = 1 \rightarrow y + x = 1 \rightarrow y = -x + 1$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \rightarrow \sin 2x = 2$$

۳۳



$$2\pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

۳- معادله‌ی  $\sin 6x + \cos 2x = 0$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟

۱۴ (۴)

$$\begin{aligned}\sin 4x &= -\cos 2x \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\end{aligned}$$

$$\sin 4x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 4x = 2k\pi + 2x - \frac{\pi}{2} \\ 4x = 2k\pi + \pi - 2x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۷۴

۱۲ (۳)

$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۱۰ (۲)

$$\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

۸ (۱)

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4} \end{array} \right\}$$

$$2 + 1 = 3$$

۱۳۱- از رابطه‌ی  $\sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x = \frac{2}{3}$  مقدار  $\cos 4x$  کدام است؟

(سراسری تیرگی خارج ۹۷)

$$\frac{2}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

۳۳- اگر  $a$  و  $b$  زاویه‌های حاده و  $\sin(a-b) = \frac{3}{5}$  و  $\tan(2b) = \frac{5}{12}$  باشد، مقدار  $\cos(a+b)$  تقریباً

کدام است؟

۰/۵۷ (۴)

۰/۵۴ (۳)

۰/۵۱ (۲)

۰/۴۸ (۱)

۳۳- اگر  $\tan \alpha$  و  $\tan \beta$  برابر ریشه‌های معادله  $2x^2 + 3x - 1 = 0$  باشند،  $\tan(\alpha + \beta)$ ، کدام

است؟

(سراسری ریاضی ۹۹)

(۴) -۱

(۳) -۳

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۱) ۱

۳۴- حاصل عبارت  $(\tan 25^\circ + \tan 40^\circ) \sin 5^\circ$  کدام است؟

$\cos 20^\circ$  (۴)

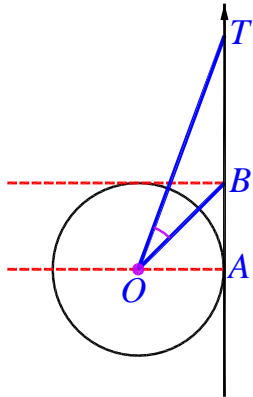
$\sin 80^\circ$  (۳)

$\tan 50^\circ$  (۲)

۱ (۱)

۳۵- با توجه به دایرهٔ مثلثاتی زیر، اگر  $BT = 2$  باشد، مقدار  $\tan(\hat{TOB})$ ، کدام است؟

(سراسری ریاضی قاجار ۹۹)



$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

۳۶- نقاط انتهایی جواب‌های معادله‌ی  $\tan x + \cot 4x = 0$  روی دایره‌ی مثلثاتی رئوس کدام چندضلعی هستند؟

(۱) مثلث متساوی‌الاضلاع

(۲) مستطیل

(۳) پنج‌ضلعی منتظم

(۴) شش‌ضلعی منتظم



## آزمون:

۳۷- حاصل  $\sin \frac{17\pi}{3} \cot \frac{7\pi}{6} + \cos \frac{11\pi}{4} \sin(-\frac{5\pi}{4})$  برابر کدام است؟

-۲ (۴) ✓

-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)


$$\sin(\cancel{4}\pi - \frac{\pi}{3}) \cot(\cancel{\pi} + \frac{\pi}{6}) + \cos(\cancel{3}\pi - \frac{\pi}{4}) \sin(-\cancel{\pi} - \frac{\pi}{4})$$


$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} + (-\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

۳۸- اعداد  $\tan 10^\circ$  و  $\sin 525^\circ$  به ترتیب کدامند؟

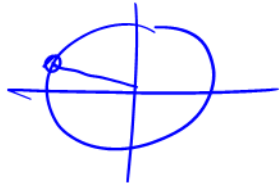
- (۱) مثبت ، مثبت ✓  
 (۲) مثبت ، منفی  
 (۳) منفی ، مثبت  
 (۴) منفی ، منفی

$10 \text{ rad} \left\{ \begin{array}{l} 10 \times 0.7^\circ = 0.7^\circ = 34^\circ + 21^\circ \\ \text{rad} \\ 10 \sim \underbrace{3\pi}_{3.14} + 0.19 \end{array} \right.$


 $\tan 10 < 0$


 $3\pi$

$525^\circ = 34^\circ + 140^\circ$



$\sin 525^\circ > 0$

۳۹- حاصل عبارت  $\frac{2 \cos \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{9\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5}}$  با فرض  $\tan 36^\circ = 0,7$  کدام است ؟

$$\frac{2 \cos \left( \frac{3\pi}{10} - \frac{2\pi}{10} \right) - \sin \left( \pi - \frac{\pi}{5} \right)}{2 \sin \frac{\pi}{5} + \cos \left( \pi + \frac{\pi}{5} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}} \xrightarrow{\div \cos \frac{\pi}{5}}$$

$$\frac{2 \tan \frac{\pi}{10}}{2 \tan \frac{\pi}{5} - 1} \stackrel{0,7}{=} \frac{0,7 \times 2}{0,7 \times 2 - 1} = \frac{1,4}{0,4} = \frac{7}{2}$$

۱۴۰- اگر  $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \frac{5}{13}$  و  $\tan(\alpha - \pi) < 0$  باشد، حاصل  $\sin \alpha + \tan \alpha$  کدام است؟

$$-\frac{96}{65} \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$\frac{96}{65} \quad (۳)$$

$$-\frac{216}{65} \quad (۲)$$

$$\frac{216}{65} \quad (۱)$$

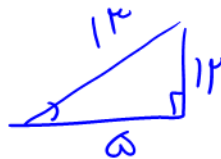
$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{112}{13} - \frac{12}{5} &= 12 \left( \frac{1}{13} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{12 \times (-1)}{5 \times 13} \end{aligned}$$

$$\tan \alpha < 0$$

$$-\cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\rightarrow \sin \alpha > 0$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{13}$$



$$\tan \alpha = -\frac{12}{5}$$

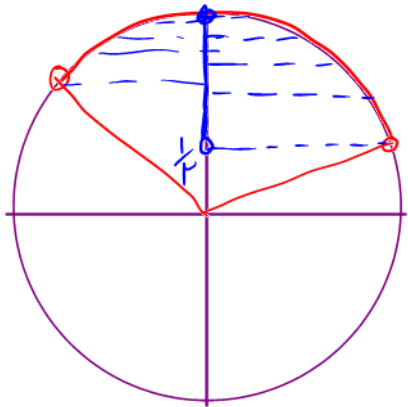
۴۱- اگر  $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4})$  باشد، در برد تابع  $f(x) = 6\sin x + 1$  چند عدد صحیح وجود دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳) ✓

۲ (۲)

۱ (۱)



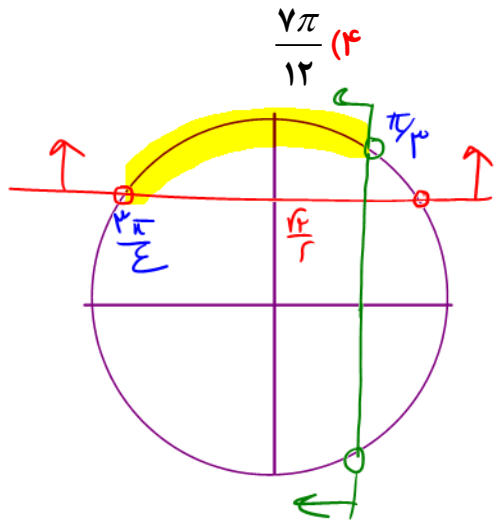
$$\frac{1}{4} < \sin x \leq 1$$

$$4 < 4\sin x + 1 \leq 5$$

$$R_f = (4, 5] \rightarrow 2, 4, 5$$

۱۴۶- اگر  $2\sin x - \sqrt{2} > 0$  و  $2\cos x - 1 < 0$  برای هر  $x$  در بازه  $(a, b)$  برقرار باشد، بیشترین

مقدار  $b - a$  کدام است ؟



$$\frac{5\pi}{12} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x < \frac{1}{2}$$

$$\frac{3\pi}{12} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{12} \quad (1)$$

$$x \in 2k\pi + \left( \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$b - a = \frac{5\pi}{12}$$

۴۳- اگر  $\sin \alpha$  و  $\cos \alpha$  ریشه‌های معادله‌ی  $\delta x^2 + mx + 2 = 0$  باشند، مقدار  $\tan \alpha$  کدام می‌تواند

باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۵ (۱)

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{p}{\delta} \rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\delta}{p}$$

$$\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} = 2 + \frac{1}{p} \rightarrow \tan \alpha = 5 \frac{1}{p}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \delta^2 - 2p = 1 \rightarrow \left(-\frac{m}{\delta}\right)^2 - 2\left(\frac{p}{\delta}\right) = 1$$

$$m^2 = 4x\delta \rightarrow m = \pm 2\sqrt{\delta}$$

۱۴۴- اگر  $\tan x + \frac{1}{\cos x} = 2$  باشد، مقدار  $\tan x - \frac{1}{\cos x}$  برابر کدام است؟

$$\frac{2}{2} \text{ (۴)}$$

$$-\frac{2}{2} \text{ (۳) } A$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۲)}$$

$$-\frac{1}{2} \text{ (۱) } \checkmark$$

$$\tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = 2A$$

$$\tan^2 x - (1 + \tan^2 x) = 2A \rightarrow 2A = -1 \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = 2 \rightarrow \sin x = 2 \cos x - 1 \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \star$$

$$2 \cos^2 x - 2 \cos x + 1 + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = 0 \text{ } \times, \cos x = \frac{1}{2} \text{ } \checkmark, \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{1/2} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1/2} - \frac{1}{1/2} = -\frac{1}{2}$$



۴۵- اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه دوم دایرهی مثلثاتی باشد، عبارت

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{1+\tan^2\alpha}$$

برابر کدام است ؟

$\cot\alpha$  (۴)

$\tan\alpha$  (۳)

$-\cot\alpha$  (۲)

$-\tan\alpha$  (۱)

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} \times \frac{1+\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}} = \left| \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} \right|$$

$$1+\sin\alpha \geq 0 \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|} &= \frac{1+\sin\alpha}{-\cos\alpha} \\ \sqrt{1+\tan^2\alpha} &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{|\cos\alpha|} = \frac{1}{-\cos\alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

۱۴۶- اگر  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{9}$  باشد، مقدار مثبت  $\tan^3 x + \cot^3 x$  کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۴ (۳)

۱۶ (۲)

۱۸ (۱)

$$1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{7}{9} \rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{9} \rightarrow \sin x \cos x = \pm \frac{1}{3}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \pm 3$$

$$\begin{aligned} \tan^3 x + \cot^3 x &= (\tan x + \cot x)^3 - 3 \tan x \cot x (\tan x + \cot x) \\ &= 3^3 - 3(3) = 18 \end{aligned}$$

۴۷- اگر تابع  $y = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - a}{\sin^2 2x}$  در دامنه‌ی تعریفش به صورت تابع ثابت  $y = b$  باشد،

مقدار  $\frac{a}{b}$  کدام است؟

$$y = \frac{\cancel{1 - 2\sin^2 2x} - a}{(2\sin 2x)^2}$$

۴ (۴)

$$a = 1$$

۲ (۲)

۲ (۱)

$$y = -\frac{1}{4} \quad b = -\frac{1}{4}$$

۱۴۸- اگر  $\frac{\sin x - 2 \cos x}{\sin x + 2 \cos x} = 3$  باشد، مقدار  $\tan 2x$  چقدر است؟

$$\frac{7}{15} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{5} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{15} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{5} \text{ (۱)}$$

$$S - 2C = 3S + 4C \rightarrow -2S = 4C \rightarrow \frac{S}{C} = -2 \rightarrow \tan x = -2$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{4}{3}$$

۱۴۹- حاصل  $\frac{1}{2} - (\sin^2 x - \cos^2 x)^2$  به ازای  $x = \frac{\pi}{24}$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۱)$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 = -\cos 2x$$

$$\frac{1}{2} - \cos^2 2x = \frac{1 - 2\cos^2 2x}{2} = \frac{-\cos 4x}{2} =$$

$$-\frac{1}{2} \cos 4x = -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

سوال اصلی  
دارد

۵۰- اگر  $|x| < \frac{\pi}{4}$  و  $\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} = \frac{2}{\sqrt{5}}$  باشد، حاصل  $\cot x$  برابر کدام است؟

۲ (۴)

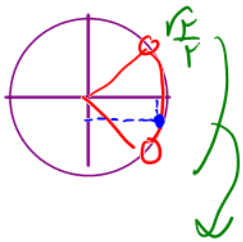
$\frac{1}{2}$  (۳)

$-\frac{1}{2}$  (۲)

-۲ (۱)

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = (\sin x + \cos x)^2$$

$$\sqrt{(\sin x + \cos x)^2} + \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \underbrace{|\sin x + \cos x|}_{+} + \underbrace{|\sin x - \cos x|}_{-} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



$$\cancel{\sin x} + \cos x - \cancel{\sin x} + \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.447$$

سوال اصلی دارد

$$\cos x > \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.447$$



$$\cot x = \pm \frac{1}{2}$$

۹۴

(سراسری تیربی فارچ ۹۵)

۵۱- اگر  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$  باشد، مقدار  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$  کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$-\frac{1}{2}$  (۲)

$-2$  (۱) ✓

$$-\cot \frac{\alpha}{2} = -2$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

---

$$\frac{\sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cancel{1 + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

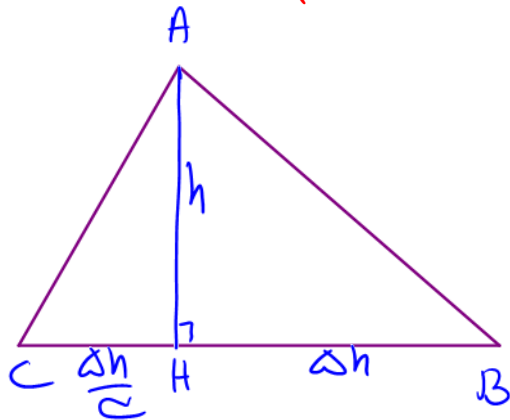
۵۲- در مثلث  $ABC$  اگر  $\tan \hat{B} = 0,2$ ،  $\tan \hat{C} = 0,6$  و  $BC = 40$  باشد، مساحت چقدر است؟

۱۶۰ (۴)

۱۴۰ (۳)

۱۲۰ (۲) ✓

۱۰۰ (۱)



$$\tan B = 0,2 = \frac{1}{5} \quad \frac{h}{BH} = \frac{1}{5} \rightarrow BH = 5h$$

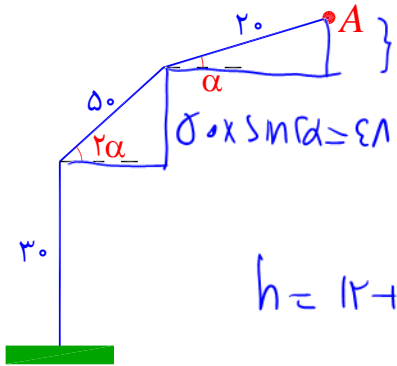
$$\tan C = 0,6 = \frac{3}{5} = \frac{h}{CH} \rightarrow CH = \frac{5h}{3}$$

$$\frac{5h}{3} + 5h = 40 \rightarrow \frac{20}{3}h = 40 \rightarrow h = 6$$

$$S = \frac{1}{2} \times 40 \times 6 = 120$$



۵۳- در شکل مقابل اگر  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  باشد، ارتفاع A از سطح زمین چند متر است؟



$$20 \sin \alpha = 12$$

$$20 \times \sin \alpha = 12$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 37^\circ$$

$$h = 12 + 18 + 30 = 60$$

$$90 \quad (2) \quad \checkmark$$

$$11 \quad (1)$$

$$94 \quad (4)$$

$$92 \quad (3)$$

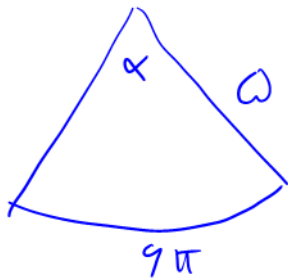
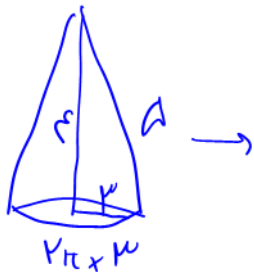
۵۴- در یک مخروط، ارتفاع ۴ و قطر قاعده ۶ واحد است. گسترده‌ی این مخروط قطاعی از دایره است. زاویه‌ی این قطاع چند درجه است؟

۲۴۰ (۴)

۲۳۲ (۳)

۲۲۴ (۲)

۲۱۶ (۱) ✓



$$\alpha r = 6\pi$$

$$\alpha = \frac{6\pi}{r}$$

$$\alpha = \frac{6 \times 180^\circ}{4} = 270^\circ$$

۵۵- دوره تناوب تابع  $f(x) = \sin^2 2x + \cos^2 2x$  کدام است؟

$$\frac{\pi}{8} \text{ (۴)}$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ (۳)} \quad \checkmark$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ (۲)}$$

$$\pi \text{ (۱)}$$

$$f(x) = 1 - 2 \sin^2 2x \cos^2 2x = 1 - 2x \left( \frac{1}{2} \sin 4x \right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 4x$$

$$T = \frac{\pi}{2}$$

۵۶- در تابع  $f(x) = a \cos\left(bx + \frac{\pi}{4}\right) + c$  اگر ماکسیمم برابر ۴ و دوره تناوب برابر  $8\pi$  باشد و یکی

از نقاط تقاطع تابع با محور  $x$  نقطه‌ای به طول  $\frac{5\pi}{3}$  باشد، با فرض این که  $a < 0$  و  $b > 0$  باشد، مقدار

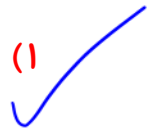
مینیمم این تابع چقدر است؟

$$-\frac{4}{3} \quad (۴)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$-1 \quad (۲)$$

$$-12 \quad (۱)$$



$$T = \frac{2\pi}{b} = 8\pi \rightarrow b = \frac{1}{4} \quad \max = |a| + c = -a + c = 4$$

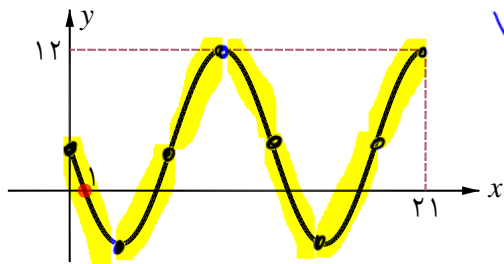
$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 0 \rightarrow a \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) + c = 0 \quad -\frac{a}{\sqrt{2}} + c = 0 \rightarrow a = \sqrt{2}c$$

$$c = -4, a = -1 \quad f(x) = -1 \cos\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{4}\right) - 4$$

$$\min = -1 - 4 = -5$$

۵۷- اگر شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = a + b \sin(cx)$  باشد، مقدار  $f(71)$

کدام است؟



$$V\left(\frac{1}{2}T\right) = 0$$

۲ (۲)

-۲ (۱)

$$\rightarrow T = 12$$

۸ (۴)

۶ (۳)

$$\frac{2\pi}{|c|} = 12 \rightarrow |c| = \frac{\pi}{6}$$

$$c = \frac{\pi}{6} \quad f(x) = a + b \sin \frac{\pi x}{6} \quad \max = a + |b| = 12$$

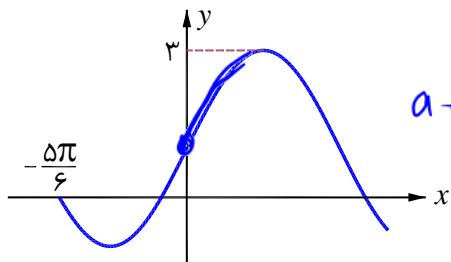
$$b < 0 \rightarrow a - b = 12 \quad f(1) = 0 \rightarrow a + b\left(\frac{1}{6}\right) = 0 \rightarrow b = -6a$$

$$\rightarrow a - (-6a) = 12 \rightarrow a = 2 \quad b = -12 \quad f(x) = 2 - 12 \sin \frac{\pi x}{6}$$

$$1.1 \quad f(71) = 2 - 12 \sin \frac{71\pi}{6} = 2 - 12 \sin \left(11\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 2 - 12 \left(-\frac{1}{2}\right) = 8$$

۵۸- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  است. مقدار تابع در  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام

(سراسری تجربی فارغ ۹۱)



$$y = a + b \sin x$$

$$a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 0$$

$$a - \frac{b}{2} = 0 \rightarrow b = 2a$$

$$\max = 3 \rightarrow a + |b| = 3 \quad b > 0$$

$$a + b = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array} \right\}$$

۲ (۲) ✓

۱ + √۳ (۴)

است؟

۱/۵ (۱)

۲/۵ (۳)

$$f(x) = 1 + 2 \sin x \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

۵۹- نمودار تابع  $f(x) = c - a \cos(bx - \frac{\pi}{6})$  شکل زیر است. مقدار  $f(\frac{\pi}{2})$  کدام است؟  $a$  و  $b$

مثبت هستند.

$$T = \frac{0\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$T = \frac{2\pi}{b} = \pi$$

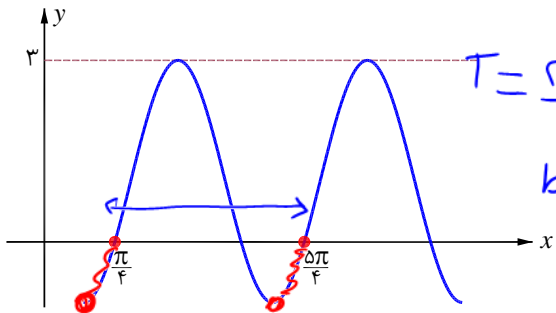
$$b = 2$$

$$f(x) = c - a \cos(2x - \frac{\pi}{6})$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \quad (2) \\ & 2 - \sqrt{2} \quad (4) \end{aligned}$$

$$1 \quad (1)$$

$$1 + \sqrt{3} \quad (3) \quad \checkmark$$



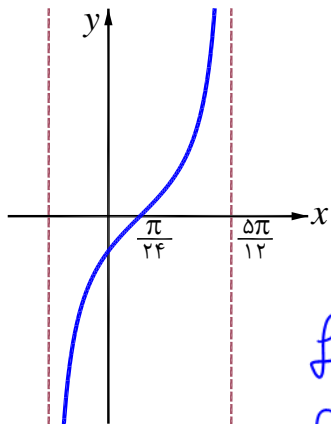
$$\max = c + |a| = c + a = 3$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = 0 \rightarrow c - a \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = 0 \rightarrow c - \frac{a}{2} = 0 \rightarrow a = 2c \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ c = 1 \end{array} \right.$$

$$1.3 \quad f(x) = 1 - 2 \cos(2x - \frac{\pi}{6})$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 1 - 2 \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = 1 + 2\sqrt{3}$$

۴۰- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $y = a + \tan\left(bx - \frac{\pi}{3}\right)$  است.  $a + b$  کدام است؟



$$bx - \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$bx = k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

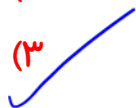
$$4 + \sqrt{3} \quad (2)$$

$$5 \quad (4)$$

$$b > 0$$

$$2 + \sqrt{3} \quad (1)$$

$$3 \quad (3)$$



$$k=0 \rightarrow bx = \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \frac{5\pi}{6b} = \frac{5\pi}{12} \rightarrow b=1$$

$$f(x) = a + \tan\left(1x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0 \rightarrow a + \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0 \rightarrow a = 1$$



۶۱- مجموع کوچک ترین و بزرگترین ریشه‌ی معادله‌ی  $2\cos(3x - \frac{\pi}{3}) + 1 = 0$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  چند

برابر  $\frac{\pi}{9}$  است؟

۲۴ (۴)

۲۲ (۳)

۲۰ (۲) ✓

۱۸ (۱)

$$\cos(3x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 3x = k\pi + \pi \\ 3x = k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = k\pi + \pi \\ 3x = k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} : \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

$$x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{9} : \frac{8\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}$$

$$\frac{14\pi}{9} + \frac{\pi}{3} = \frac{20\pi}{9}$$

۶۲- مجموعه جواب معادله  $4 \cos^2 2x = 3$  کدام است؟

$$\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12} \quad (۲) \quad \checkmark$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{12} \quad (۱)$$

$$\cos 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$2x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$$

۶۳- مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $\cos 4x + \sin 2x = 1$  در بازه‌ی  $[\pi, 2\pi]$  کدام است؟

$7\pi$  (۴)

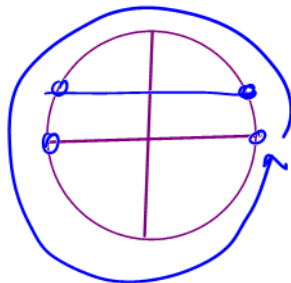
$6, 5\pi$  (۳)

$6\pi$  (۲)

$5\pi$  (۱)

$$1 - 2\sin^2 2x + \sin 2x = 1 \rightarrow \sin 2x (-2\sin 2x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$2\pi \leq 2x \leq 4\pi$$

$$2x = 2\pi, \pi + \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{3\pi}{4}, 3\pi, 4\pi$$

$$\oplus \rightarrow 2x_+ = 14\pi \rightarrow x_+ = 7\pi$$

۶۴- جواب کلی معادله  $2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$  کدام است؟

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

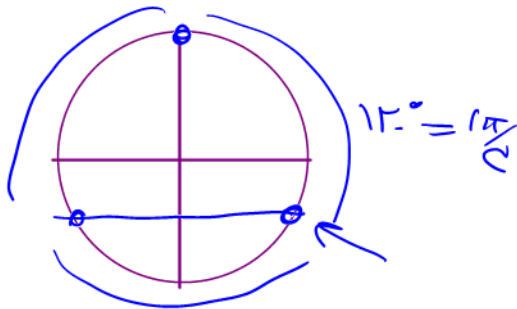
$$\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

$$\sin 2x = 1, -\frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{2k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$$



۶۵- مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{-\cos x}$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$5\pi$  (۴)

$\frac{23\pi}{6}$  (۳)

$\frac{7\pi}{2}$  (۲)

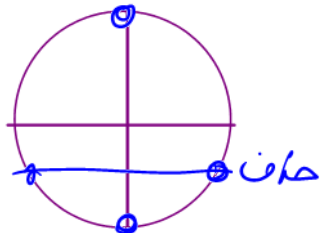
$\frac{19\pi}{6}$  (۱) ✓

$$\sin 2x = -\cos x \quad -\cos x \geq 0 \rightarrow \cos x \leq 0$$

$$2 \sin x \cos x + \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\rightarrow \frac{19\pi}{6}$$

۴۴- رابطه‌ی  $\frac{\sin 70^\circ - \sin 20^\circ \cos 50^\circ}{\cos 70^\circ - \cos 20^\circ \cos 50^\circ} = \tan x$  برای کدام  $x$  درست است؟

۱۶۰° (۴)

۱۱۰° (۳) ✓

۷۰° (۲)

۲۰° (۱)

$$\frac{\sin(30+20) - \sin 20 \cos 30}{\cos(30+20) - \cos 20 \cos 30} = \frac{\sin 30 \cos 20 + \cos 30 \sin 20 - \sin 20 \cos 30}{\cos 30 \cos 20 - \sin 30 \sin 20 - \cos 20 \sin 30}$$

$$\frac{\sin 30 \cos 20}{-\sin 30 \sin 20} = -\cot 20 = \cot(-20) = \tan(110^\circ)$$

۶۷- اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ربع اول دایره مثلثاتی و  $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$  باشد، مقدار  $\sin\left(\frac{13\pi}{4} + \alpha\right)$  کدام

(سراسری ریاضی فارغ ۹۹)

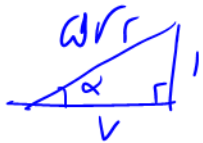
است؟

$$\frac{4}{5} \quad (۴)$$

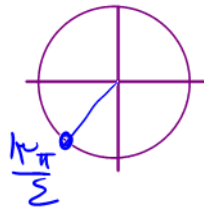
$$\frac{3}{5} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{5} \quad (۲)$$

$$-\frac{4}{5} \quad (۱) \quad \checkmark$$



$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \sin \frac{13\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{13\pi}{4} \sin \alpha &= -\frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= -\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = -\frac{2}{5} = -\frac{4}{10} \end{aligned}$$

۴۸- اگر  $\frac{\cos 42^\circ + \sin 42^\circ}{\cos 42^\circ - \sin 42^\circ} = \cot a$  باشد، مقدار زاویه  $a$  چند درجه است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\div 642^\circ \rightarrow \frac{1 + \tan 42^\circ}{1 - \tan 42^\circ} = \tan(42^\circ + 42^\circ) = \tan 84^\circ = \cot 6^\circ$$



۶۹- اگر  $1 + \tan 22^\circ \cot 46^\circ = \frac{1}{\cos \alpha}$  باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی حاده‌ی  $\alpha$  چند درجه است؟

۶۸ (۴)

۴۶ (۳)

۴۴ (۲) ✓

۲۲ (۱)

$$1 + \frac{\sin 22^\circ}{\cos 22^\circ} \times \frac{\cos 46^\circ}{\sin 46^\circ} = \frac{\sin 46^\circ \cos 22^\circ + \sin 22^\circ \cos 46^\circ}{\cos 22^\circ \sin 46^\circ} = \frac{\sin(46^\circ + 22^\circ)}{=}$$

$$\frac{\cancel{\sin 22^\circ}}{\cancel{\cos 22^\circ} \sin 46^\circ} = \frac{1}{\sin 46^\circ} = \frac{1}{\cos 44^\circ}$$

$$22^\circ + 22^\circ = 44^\circ$$

۷۰- در مثلث  $ABC$ ، ارتفاع  $AH$  را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی  $H$  روی ضلع  $BC$  قرار دارد.

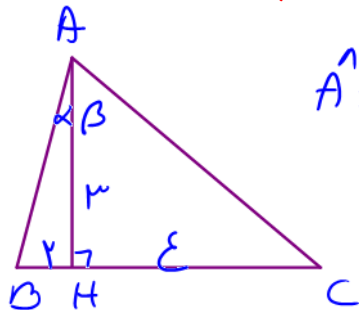
اگر  $AH = 3$ ،  $BH = 2$  و  $CH = 4$  باشند،  $\tan \hat{A}$  برابر کدام است؟

۲۲ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲) ✓

۱۶ (۱)



$$\hat{A} = \alpha + \beta$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{2} \times \frac{3}{4}} = \frac{9}{1/4} = 18$$

۷۱- معادله  $3 \tan x - \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 3$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟

۴ (صفر)

۶ (۳)

۴ (۲) ✓

۲ (۱)

$$3 \tan x - \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 3$$

$$\frac{3 \tan x + 3 \tan^2 x - 1 + \tan x}{1 + \tan x} = 3$$

$$3 \tan^2 x + \tan x - 3 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

