

# کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل یازدهم : حد و پیوستگی

مهر داد عباسپور

## همسایگی

(الف) به هر بازه‌ی باز شامل نقطه‌ی  $x_0$  یک همسایگی نقطه‌ی  $x_0$  می‌گوییم.



(ب) همسایگی محذوف  $x_0$  یعنی  $(a, b) - \{x_0\} = (a, x_0) \cup (x_0, b)$



(پ) همسایگی راست  $x_0$  یعنی  $(x_0, x_0 + r)$



(ت) همسایگی چپ  $x_0$  یعنی  $(x_0 - r, x_0)$



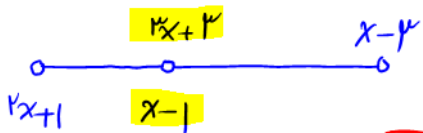
۱- اگر  $(2x+1, x-1) \cup (3x+3, x-3)$  یک همسایگی محذوف باشد، مقدار  $x$  کدام است؟

۴ (۴)

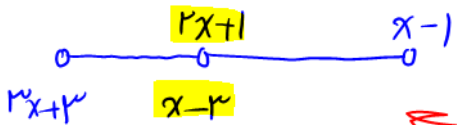
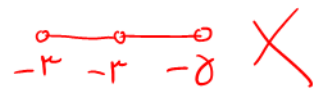
-۴ (۳) ✓

۲ (۲)

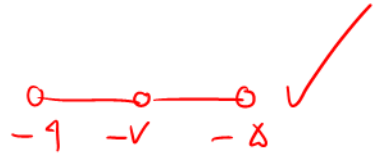
-۲ (۱)



$$3x+3 = x-1 \Rightarrow x = -2$$



$$2x+1 = x-3 \Rightarrow x = -4$$



# مفاهیم ابتدایی حد



۳- اگر  $f$  یک تابع خطی و  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x+1}{f(x)+1} = 2$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} fof(x) = 6$  باشد، عرض از مبدأ  $f$  کدام است؟

-1 (۴)

-2 (۳)

2 (۲)

1 (1)

$$\left| \begin{array}{l} \frac{10}{f(3)+1} = 2 \rightarrow f(3) = 4 \\ \downarrow \\ f(f(3)) = 6 \rightarrow f(4) = 6 \end{array} \right.$$

$$m = \frac{4-6}{3-4} = 2 \rightarrow y = 2x + b \xrightarrow{(3,4)} b = -2$$

$$f(x) = 2x - 2$$

## محاسبات حد کسری وقتی حد صورت و مخرج صفر باشد

(۱) انواع محاسبات جبری برای از بین بردن عامل صفر کننده از صورت و مخرج

(۲) قاعده‌ی هوییتال فرض کنید  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، در این صورت :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

البته به شرط اینکه حد سمت راست موجود (یا بی‌نهایت) باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + \sqrt{x+2})(x - \sqrt{x^2 + x - 2})}{x - x^2} = \frac{f(x) \cdot 0}{0}$$

مثال :

$$f(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x^2 + x - 2}}{x - x^2} = \frac{0}{0} \rightarrow f(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x - 2}}}{-2x}$$

$$f(x) \frac{1 - \frac{x^2}{12}}{-2} = \left( \frac{1}{12} \right)$$

^



(۳) قاعده‌ی کم‌توان : در حدهایی که صورت یا مخرج کسر مجموع چندین عامل صفر باشد،

کافی است فقط جملاتی را قرار دهیم که توان عامل صفر کننده کمتر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x + 2x^2}}{\sqrt[3]{8x + x^3}}$$

$$\rightarrow \frac{0^1 + 0^{\frac{1}{2}} + 0^{\frac{2}{2}}}{0^{\frac{1}{3}} + 0^{\frac{2}{3}}} \rightarrow \frac{0^{\frac{1}{3}} (0^{\frac{2}{3}} + 1 + 0^{\frac{2}{3}})}{0^{\frac{1}{3}} (1 + 0^{\frac{2}{3}})}$$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8x}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{1 + 2x})}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{8 + 2x^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

(۴) مسئله‌های معروف به صورت  $\frac{A}{0} \pm \frac{B}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{x - 2}{x^2 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{(x-1)(x+1)} + \frac{x-2}{x(x-1)} \right)$$

مثال :

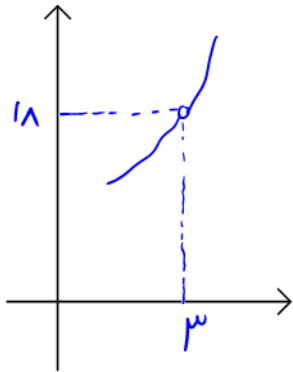
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + (x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} \rightarrow 2x + x^2 - 2x + x - 2 = x^2 + x - 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{x \cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{2}{1}$$

## نکته‌ی مهم :

اگر حد یک کسر موجود و حد مخرج صفر باشد، حتماً حد صورت کسر هم صفر است.  
(نقطه‌ی تو خالی روی نمودار تابع)

**مثال :** اگر  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2 + bx}{x^2 + x - 12} = 18$  باشد، مقادیر  $a$  و  $b$  را بیابید.



$$\frac{2va + 3b}{0} = 18 \quad ? \Rightarrow 2va + 3b = 0$$

$$\Rightarrow \underline{b = -9a}$$

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2ax^2 + b}{2x + 1} = 18 \Rightarrow \frac{2va + b}{v} = 18$$

$$\frac{2va - 9a}{v} = 18 \rightarrow \boxed{a = v, b = -9v}$$

(سراسری ریاضی ۹۹)

۴- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}}$  ، کدام است ؟

(۴) -۰/۶

(۳) -۰/۸

(۲) -۱/۲ ✓

(۱) -۱/۵

$$\frac{0}{0} \rightarrow \frac{2 - \frac{7}{\sqrt{x}}}{2 - \frac{3}{\sqrt{3x+1}}} = \frac{2 - \frac{7}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{4-7}{2}}{\frac{4-3}{2}} = -\frac{3}{1} = -3$$

(سراسری تیرمی ۹۳)

۵- حاصل  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$  کدام است؟

$$\frac{7}{12} \text{ (۴)}$$

$$\frac{5}{12} \text{ (۳)}$$

$$-\frac{5}{12} \text{ (۲) ✓}$$

$$-\frac{17}{12} \text{ (۱)}$$

$$\frac{3}{(x+2)(2x+1)} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{3(x-2) - 4(2x+1)}{(x-2)(x+2)(2x+1)}$$

$$\frac{-2x - 10}{=} = \frac{-2(x+2)}{(x-2)(x+2)(2x+1)}$$

$$x \rightarrow -2 : \frac{-2}{(-4)(-3)} = -\frac{2}{12}$$

۶- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$  برابر کدام است؟

۱ (۱) ✓

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴) صفر

کیم توانه:

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} (\sqrt[2]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x} (\sqrt{x} - 1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

اگر  $-7$   $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x^4 + 5x - 6}{x^2 + x - 2}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  برابر کدام است؟

-9 (4)

9 (3)

-1 (2)

1 (1)

$$\frac{x}{x+1} = 2 \rightarrow x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + 5x - 6}{x^2 + x - 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \frac{4x^3 + 5}{2x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{-2^4}{-2} = 4$$

۸- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x^2+x-6} = \frac{1}{5}$  باشد، مقدار  $a+b$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\frac{\sqrt{2a+b}-3}{0} = \frac{1}{5} \rightarrow \sqrt{2a+b}-3=0 \rightarrow 2a+b=9$$

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{a}{\sqrt{ax+b}}}{2x+1} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2a+b}}}{5} = \frac{\frac{a}{9}}{5} = \frac{0}{5}$$

$$\frac{a}{9} = \frac{1}{5} \rightarrow a=9/b=-2$$

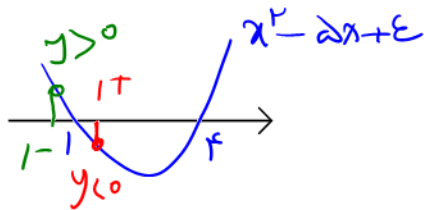


## حدهای راست و چپ

(۱) معمولاً در توابعی که قدرمطلق دارند و حد عبارت داخل قدرمطلق صفر است، نیاز است

حد راست و چپ جدا شود.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 2x + 4|}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$



مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x^2 - 2x + 4)}{x^2 - 1} = \frac{-(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{+(x^2 - 2x + 4)}{x^2 - 1} = -\frac{4}{2}$$

(۲) معمولاً در توابعی که جزء صحیح دارند و حد عبارت داخل آن عدد صحیح است، نیاز

است حد راست و چپ جدا شود.

(۳) اگر تعیین بیشتر یا کمتر بودن یک تابع در حدهای راست و چپ سخت شد، به صعود یا

نزولی بودن تابع مراجعه کنید :

اگر  $f$  اکیداً صعودی باشد:  $\begin{cases} x \rightarrow a^+ : f(x) \rightarrow L^+ \\ x \rightarrow a^- : f(x) \rightarrow L^- \end{cases}$

$x=a, y=L$

اگر  $f$  اکیداً نزولی باشد:  $\begin{cases} x \rightarrow a^+ : f(x) \rightarrow L^- \\ x \rightarrow a^- : f(x) \rightarrow L^+ \end{cases}$

$x=a, y=L$



$x \rightarrow a : y \rightarrow L^+$



$x \rightarrow a : y \rightarrow L^-$

$$\lim_{x \rightarrow 7} [\sqrt{6x+1}] = [\sqrt{43}] = [9, 10] = 9$$

مثال :

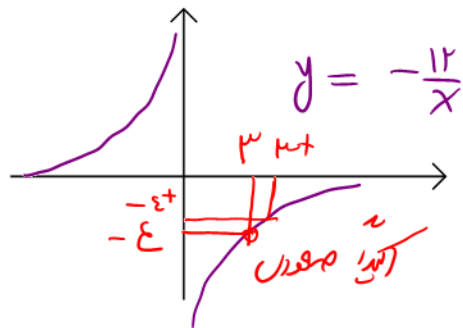
مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[ -\frac{12}{x} \right] = \left[ -\varepsilon^+ \right] = -\varepsilon$$

موردی

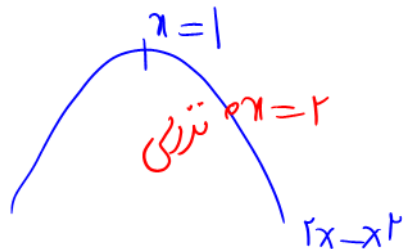
$$x > 3 \Rightarrow \frac{12}{x} = \frac{12}{3/m} = 4/m \rightarrow -\frac{12}{x} = -4/m \rightarrow -\varepsilon^+$$

موردی



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [2x - x^2] = [0^+ 0] = 0$$

مثال :



مثال :

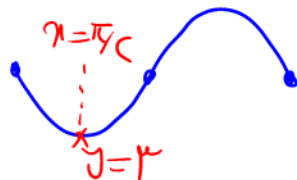
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\Delta - 2 \sin x] = [3^+] = 3$$

الحد :  $\sin x < 1 \rightarrow -2 \sin x > -2 \rightarrow \Delta - 2 \sin x > 3$

لماذا؟

$\sin x : x = \pi/2$  max

$\Delta - 2 \sin x : x = \pi/2$  min



(۴) در حدهای ترکیبی برکت با سایر توابع اول مقادیر برکت را محاسبه و جای گذاری کنید

و سپس حد را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - [2x]}{x^2 + [-x]}$$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2}{x^2 + (-2)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$x \rightarrow 1^+ : [2x] = [2^+] = 2, [-x] = [-1^-] = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x^2 + (-1)} = \frac{0}{0} \rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow 1^- : [2x] = [2^-] = 1, [-x] = [-1^+] = -1$$

(۵) حد توابع چندضابطه‌ی در نقاط مرزی

(۶) حد توابع در نقاط انتهایی دامنه وجود ندارد. مثلاً  $f(x) = \sqrt{x}$  در  $x = 0$  حد ندارد.



برابر کدام است؟  $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x + |x^2 + 3x - 4| + 4}{\sqrt{5-x} - 3}$  حاصل -9

۳۶ (۴)

۲۴ (۳)

-۲۴ (۲)

-۳۶ (۱) ✓



$$\frac{x - x^2 - 3x + 4 + 4}{\sqrt{5-x} - 3} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{L'H}$$

$$\frac{-2x - 4}{-1} = \frac{4}{-1} = -4$$



۱۱- حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{[x] - x[-2x]}{|x^3 + 1|}$  برابر کدام است؟

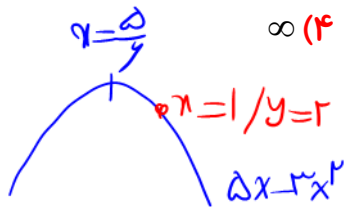
$-\frac{1}{3}$  (۲)       $-\frac{2}{3}$  (۱)

$[ -2x ] = [ 2^- ] = 1$

$\frac{2}{3}$  (۴)       $\frac{1}{3}$  (۳)

$$\frac{-1 - x(1)}{x^3 + 1} = \frac{-1 - x}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$
$$= \frac{-1}{x^2 - x + 1}$$

نزدیکی  
 حاصل، باشد،  $f(x) = \begin{cases} \frac{x[-x]+6}{4-x^2} & x > 2 \\ \frac{|x-\sqrt{x+2}|}{x^2+2x-8} & x < 2 \end{cases}$  اگر -۱۲  
 برابر کدام است؟  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(\underbrace{\Delta x - 3x^2}_{2+})$



$$\frac{2}{4} \text{ (3) } \checkmark$$

$$-\frac{1}{8} \text{ (2)}$$

$$\frac{1}{8} \text{ (1)}$$

$$f(2+) = \frac{x[-x]+4}{4-x^2} = \frac{x(-3)+4}{4-x^2}$$

$$= \frac{3(2-x)}{(2-x)(2+x)} = \frac{3}{2+x}$$

## حدهای مثلثاتی

(۱) استفاده از هم‌ارزی‌ها: وقتی  $u \rightarrow 0$

$\sin u \sim u$	$\cos u \sim 1 - \frac{1}{2}u^2$	$\tan u - \sin u \sim \frac{1}{2}u^3$
$\tan u \sim u$	$\cos^n u \sim 1 - \frac{n}{2}u^2$	$(1+u)^n \sim 1 + nu$

(۲) وقتی  $u \rightarrow 0$ ، معمولاً بهتره به جای  $\cot u$  قرار بدیم  $\frac{1}{\tan u}$  تا بتوانیم از هم‌ارزی‌ها استفاده

کنیم.

(۳) تغییر متغیر وقتی  $x$  به عدد غیر صفر میل کند.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \xrightarrow{x-a=t \Rightarrow x=a+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(a+t)$$

(۴) حتماً بلد باشید که در بازه‌ی  $(0, \frac{\pi}{4})$  :  $\sin x < x < \tan x$  و همچنین :

$$x \rightarrow 0 : \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1^- , \frac{\tan x}{x} \rightarrow 1^+$$

(سراسری ریاضی فارغ ۹۱)

۱۳- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x}$  کدام است؟

$2\pi$  (۴)

$\pi$  (۳)

$2$  (۲) ✓

$1$  (۱)

$$\frac{1 - \cos^2(\pi x)}{1 + \cos(\pi x)} = 1 - \cos(\pi x) \underset{x \rightarrow 1^+}{=} 1 - \cos \pi = 2$$

$$\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$$

برابر کدام است؟  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{(\cot x - \tan x)^2}{1 + \sin 2x}$  حاصل -۱۴

۴ (۴)

۴√۲ (۳)

۲√۲ (۲)

۱ (۱)

$$\frac{(2 \cot 2x)^2}{1 + \sin 2x} = \frac{4 \frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x}}{1 + \sin 2x} = \frac{4 (1 - \sin^2 2x)}{\sin^2(2x) \cdot (1 + \sin 2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/4} \frac{4 (1 - \sin^2 2x)}{\sin^2(2x)} = \frac{4 (1 - (-1))}{(-1)^2} = 8$$



۱۵- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos x}}$  کدام است؟

$$2\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$-2\sqrt{2} \quad (۳) \quad \checkmark$$

$$\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$-\sqrt{2} \quad (۱)$$

$$\frac{x \sqrt{1 - \cos x}}{x \sqrt{1 - \cos x}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 - \cos x}}{|\sin x|}$$



$\sin x$

$\sin x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cancel{\sin x} \cos x \sqrt{1 - \cos x}}{\cancel{\sin x}} = 2(-1)\sqrt{1 - (-1)} = -2\sqrt{2}$$

۱۶- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \sin^2 2x}{x \tan 4x}$  کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

(سراسری ریاضی ۹۳)

$$\frac{3}{2} \text{ (۴)}$$

$$-\frac{1}{4} \text{ (۳)}$$

$$-\frac{3}{4} \text{ (۲)}$$

$$-\frac{3}{2} \text{ (۱)}$$

۱۷- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$  کدام است؟

۱۸- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \sin 3x)(\cot x - \cot 2x)$  کدام است؟

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

## حدهای نامتناهی

(۱) حالت اصلی حدهای بی‌نهایت:

$$A \neq 0 \Rightarrow \frac{A}{0^\pm} = \pm\infty$$

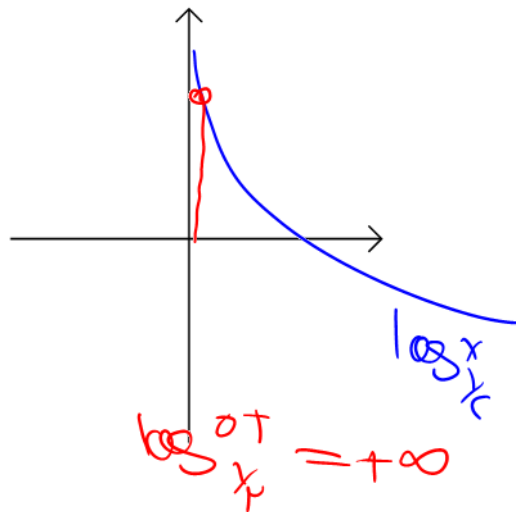
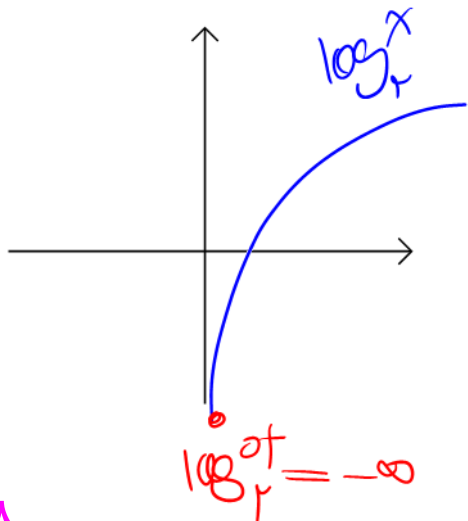
(۲) حد توابع تانژانت و کتانژانت در نقاطی که در دامنه‌ی تعریفشان نیست، بی‌نهایت است.

مثلاً:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

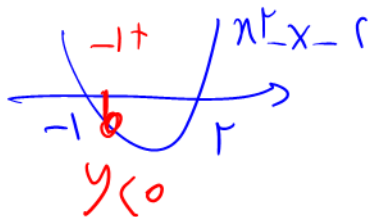
(۳) حد تابع لگاریتمی در نقطه‌ی صفر، بی‌نهایت است :

$$a > 1 : \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a^x = -\infty \quad , \quad 0 < a < 1 : \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a^x = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

مثال :



مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x] - 2}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 2^+ : [x] = 2 \Rightarrow \frac{2 - 2}{\cos\frac{\pi x}{2}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\underbrace{x \rightarrow 2^-}_{\text{دایره}} : [x] = 1 \Rightarrow \frac{1 - 2}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \frac{-1}{\cos\frac{\pi}{2^-}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

دایره



مثال: اگر  $\lim_{x \rightarrow r} \frac{x+b}{rx^2+ax+b^2} = -\infty$  باشد، مقادیر  $a$  و  $b$  را بیابید.

$$rx^2+ax+b^2 = r(x-r)^2$$

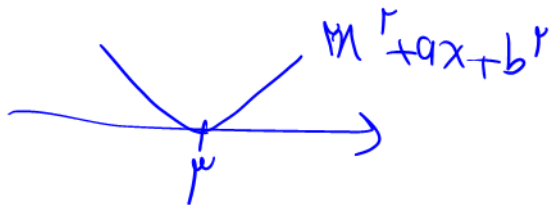
$$= rx^2 - 1rx + 1r$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow r^+ \\ x \rightarrow r^- \end{array} \right\} \Rightarrow -\infty$$

$$a = -1r$$

$$b^2 = 1r$$

$$b = \pm \sqrt{1r}$$



$$\lim_{x \rightarrow r} \frac{x+b}{rx^2+ax+b^2}$$

$$= \frac{r+b}{0^+} = -\infty$$

$$\Rightarrow b+r < 0 \Rightarrow b < -r$$

$$\rightarrow a = -1r / b = -r/r$$

۲۱

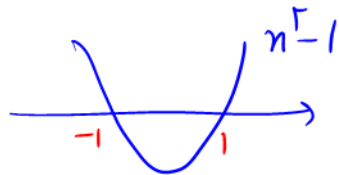
۱۹- با توجه به توابع  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{1-x^2}$  و  $g(x) = \frac{[x]}{x}$  ، کدام حد درست محاسبه شده است ؟

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$  (۴)   
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$  (۳) ✓   
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$  (۲)   
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$  (۱)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{-(x^2-1)} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\frac{1}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

۲۰- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \tan(\pi x)$  و  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \log_x^{(1-2x)}$  به ترتیب کدام است؟

(۴)  $-\infty$  و  $-\infty$

(۳)  $+\infty$  و  $-\infty$

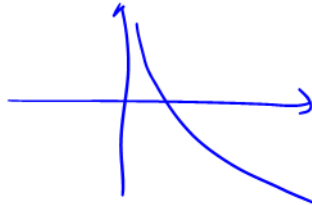
(۲)  $-\infty$  و  $+\infty$

(۱)  $+\infty$  و  $+\infty$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\sigma T} = +\infty$$

$$\tan \frac{\pi}{2}^+ = -\infty$$

پس



۲۱- حاصل  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{[2x] - 2[x]}{x^2 - 4}$  و  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[2x] - 2[x]}{x^2 - 4}$  به ترتیب کدام است؟

(۴)  $-\infty$  و صفر

(۳)  $-\infty$  و صفر

(۲) صفر و  $-\infty$

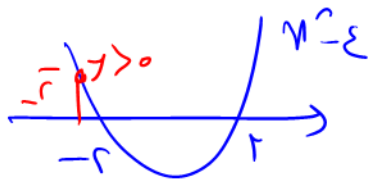
(۱) صفر و  $+\infty$



$$x \rightarrow -2^+ : \frac{[-2^+] - 2[-1^+]}{x^2 - 4} = \frac{-2 - 2(-1)}{4 - 4} = \frac{-2 + 2}{0} = \frac{0}{0}$$

$$x \rightarrow -2^- : \frac{[-2^-] - 2[-1^-]}{x^2 - 4} = \frac{-2 - 2(-1)}{4 - 4} = \frac{-2 + 2}{0} = \frac{0}{0}$$

$= +\infty$



## حد در بی نهایت

در توابع کسری که صورت و مخرج توابع چند جمله‌ای یا ترکیب آنها با توابع رادیکالی است، برای محاسبه‌ی حد کافی است در صورت و مخرج فقط جملات پرتوان را قرار دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - \sqrt{x^2 + x}}{4x + 1} = \frac{3x - |x|}{4x} = \frac{3x + x}{4x} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 6x + 1}) = x - |x| = x - x$$



مثال :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - 9x - 1}{x + \sqrt{x^2 + 4x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9x}{x + x} = -\frac{9}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{3x+1}{2-x} \right] = \left[ \frac{3x}{-x} \right] = [-3]$$

مثال :

$$\frac{3x+1}{2-x} \div \frac{-x+1}{-x} \rightarrow \left[ -3 + \frac{v}{2-x} \right] = [-3+] = -3$$

$\swarrow$   
 $\rightarrow 0+$

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

$$\frac{A}{R} \Big| \frac{B}{Q}$$

$$\frac{1v}{x} = d + \frac{c}{x}$$

$$\frac{1v}{x} \Big| \frac{c}{d}$$



۲۲- اگر  $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  کدام است؟ (سراسری تیربی فارغ ۹۱)

۳ (۴) ✓

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

$$\frac{x - |2x|}{x} = \frac{x + 2x}{x} = 3$$

۲۳- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{2x+1} - \frac{x^2+x}{2x-1} \right)$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲) -۱

(۳)  $-\frac{1}{2}$

(۴)  $-\frac{2}{4}$

$$\frac{(x^2+1)(2x-1) - (x^2+x)(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(2x^3 - x^2 + 2x - 1) - (2x^3 + 2x^2 + 2x^2 + x)}{\cancel{2x^2} - 1}$$

$$= \frac{-2x^2 + x - 1}{\cancel{2x^2} - 1} = \frac{-2x^2}{\cancel{2x^2}} = -1$$

۱۴- اگر  $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

(۴) صفر

$-\frac{1}{4}$  (۳)



$-\frac{1}{2}$  (۲)

(۱) -۱

$$\frac{4x^2 - (4x^2 + x)}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \frac{-x}{2x - |2x|} = \frac{-x}{2x + 2x} = -\frac{1}{4}$$

۲۵- اگر  $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$  و  $g(x) = \frac{2x-3}{x+1}$  باشد، مجموع حدهای راست و چپ تابع  $g \circ f$  در نقطه‌ی

$x=0$  کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

~~-۱ (۲)~~

-۳ (۱)

$$g(f(0^+)) = g(2^{+\infty}) = g(+\infty) = \frac{2x}{x} = 2$$

$$g(f(0^-)) = g(2^{-\infty}) = g(0^+) = -3$$

۲۶- برای مقادیر طبیعی  $n$ ، چند مقدار مختلف برای حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^n + nx^3 + 7}{x^n + x^3}$  ممکن است و

مجموع این مقادیر چقدر است؟

(۱) سه مقدار، ۷ (۲) سه مقدار، ۱۱ (۳) چهار مقدار، ۱۲ (۴) چهار مقدار، ۱۳

$$n=1: \frac{x^3}{x^3} = ①$$

$$n=2: \frac{2x^3}{x^3} = ②$$

$$n=3: \frac{1x^3}{2x^3} = ④$$

$$n>3: \frac{5x^n}{x^n} = ⑤$$

۵۳

## مجانباها

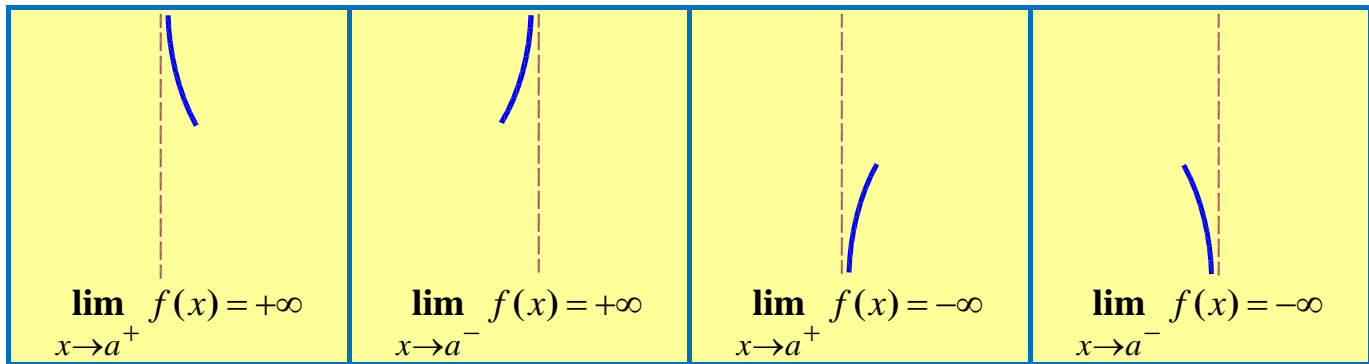
(۱) برای یافتن مجانبا قائم باید ریشه‌های مخرج را بررسی کنیم. هر نقطه‌ای که حد راست یا چپ تابع بی‌نهایت باشد، مجانبا قائم است.

(۲) تنها تابع غیر کسری که ما می‌شناسیم و مجانبا قائم دارد، تابع لگاریتمی است.

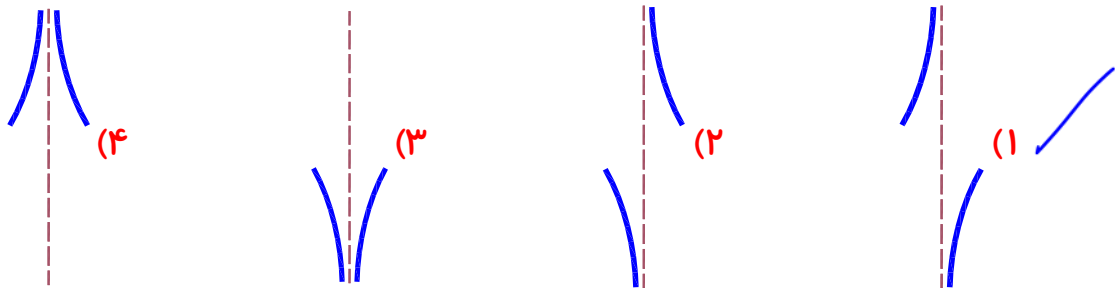
(۳) برای یافتن مجانب افقی کافی است حد تابع را در  $x \rightarrow \pm\infty$  حساب کنیم.

(۴) برای رسم نمودار تابع در اطراف مجانب قائم کافی است حد های راست و چپ را محاسبه

کنیم.



۲۷- نمودار تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  در اطراف  $x = -\pi$  به کدام صورت است؟



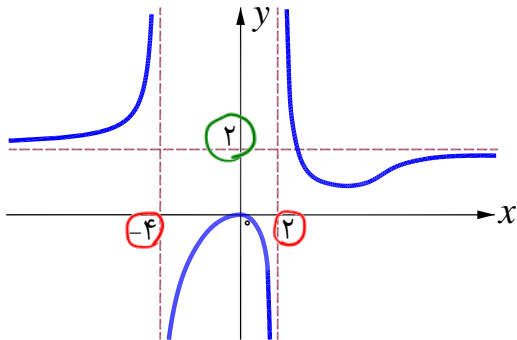
$$\frac{0}{0} \rightarrow x \text{ نزدیک } -\pi \rightarrow \frac{\sin x (1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow -\pi^+ \quad \text{Clockwise circle} \quad \frac{0}{0^-} = -\infty \\ x \rightarrow -\pi^- \quad \text{Counter-clockwise circle} \quad \frac{0}{0^+} = +\infty \end{array} \right.$$



۲۸- اگر  $f$  یک تابع درجه دوم و نمودار تابع  $y = \frac{x^2}{f(x)}$  مطابق شکل روبه‌رو باشد، مقدار  $f(-2)$  کدام است؟



$$-2 \quad (2)$$

$$-4 \quad (4)$$

$$-1 \quad (1)$$

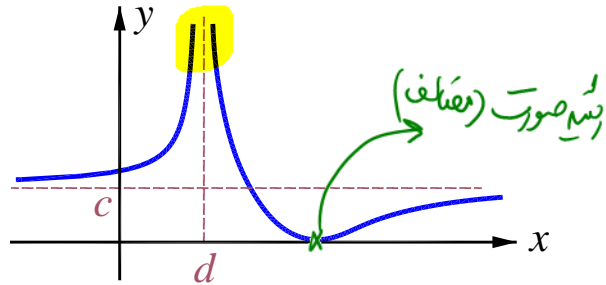
$$-3 \quad (3)$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{7}(x-2)(x+4)}$$

$$f(x) = \frac{1}{7}(x-2)(x+4)$$

$$f(-2) = \frac{1}{7}(-4)(2) = -\frac{4}{7}$$

۲۹- نمودار تابع  $f(x) = \frac{ax^2 - 4x + 2}{4x^2 + bx + 1}$  به صورت زیر است. مقدار  $a+b+c+d$  کدام است؟



$$\begin{array}{ll} 1 & (1) \\ 2 & (3) \\ -1 & (2) \checkmark \\ \vee & (4) \end{array}$$

$$ax^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Delta' = 0 \rightarrow 16 - 8a = 0 \Rightarrow a = 2$$

نقطه صورت (مناصف)

↓

$$\lim_{x \rightarrow d} f(x) = +\infty \Rightarrow \text{مخرج صفر} + \text{مناصف دارد} \Rightarrow 4x^2 + bx + 1 = (2x - 1)^2 \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$c = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{ax^2}{4x^2} = \frac{a}{4} = \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{1}{2}$$

۵۸

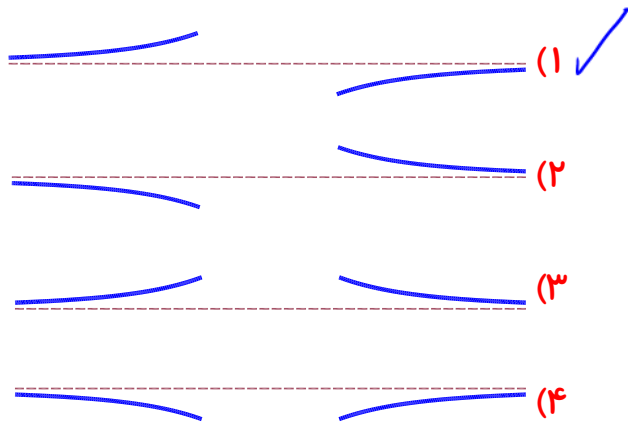
۱۳۰- نمودار تابع  $y = \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x}$  نسبت به مجانب افقی خود، در بی نهایت کدام وضع را دارد؟

(سراسری ریاضی خارج ۹۱)

$$\begin{array}{r} 2x^2 - x - 2 \mid x^2 + 2x \\ \underline{2x^2 + 4x} \\ -5x - 2 \end{array}$$

$$f(x) = 2 + \frac{-5x - 2}{x^2 + 2x}$$

$$x \rightarrow \pm\infty: y = 2 - \frac{5}{x} \quad \begin{cases} x \rightarrow +\infty: y < 2 \\ x \rightarrow -\infty: y > 2 \end{cases}$$



۱۳۱- نمودار تابع  $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c}$  دارای خط‌های جانب  $y = -1$ ،  $x = -2$  و  $x = 1$  است.  $f(-1)$

(سراسری ریاضی ۹۹)

کدام است؟

(۴)  $-1/5$

(۳)  $1/25$

(۲)  $1/5$

(۱)  $1/25$

۳۲- نقاط تقاطع خطوط مجانب تابع  $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 - 2x}}{x^2 - 4x + 3}$  همراه با مبدأ مختصات رئوس مثلثی

هستند. مساحت این مثلث چقدر است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

# پیوستگی

## پیوستگی در نقطه

(۱) تابع  $f$  در نقطه‌ی  $a$  پیوسته است هرگاه :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

(۲) پیوستگی راست و چپ نیز به همین صورت تعریف می‌شوند.

## پیوستگی در بازه :

(۱) تابع  $f$  در بازه‌ی  $(a,b)$  پیوسته است هرگاه در تمامی نقاط بازه پیوسته باشد.

(۲) تابع  $f$  در بازه‌ی  $[a,b]$  پیوسته است هرگاه در تمامی نقاط بازه‌ی  $(a,b)$  پیوسته باشد و در نقطه‌ی  $a$  پیوستگی راست و در  $b$  پیوستگی چپ داشته باشد.

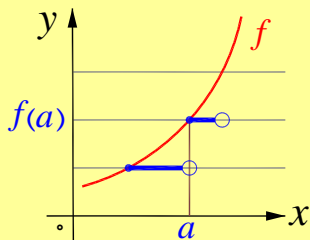
**توضیح :** پیوستگی در بازه‌های  $[a,b)$  و  $(a,b]$  به طور مشابه تعریف می‌شود.

## بررسی پیوستگی تابع جزء صحیح

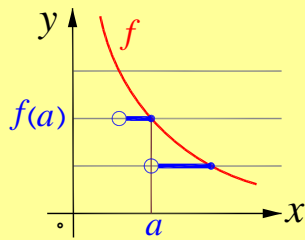
(۱) برای بررسی پیوستگی تابع  $[f]$  در نقطه‌ی  $a$  به فرض اینکه خود  $f$  پیوسته است :

(الف) اگر  $f(a)$  عدد غیر صحیح باشد،  $[f]$  در  $a$  پیوسته است.

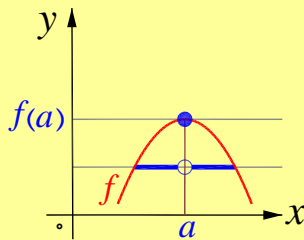
(ب) اگر  $f(a)$  عدد صحیح باشد، حالت‌های زیر به وجود می‌آید :



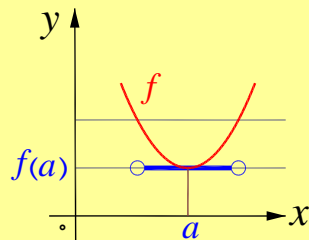
$f$  در اطراف  $a$  صعودی اکید  
 $[f]$  در  $a$  فقط پیوسته‌ی راست



$f$  در اطراف  $a$  نزولی اکید  
 $[f]$  در  $a$  فقط پیوسته‌ی چپ



$a$  در  $f$  ماکسیمم نسبی  
 $[f]$  در  $a$  ناپیوسته ولی دارای حد



$a$  در  $f$  می‌نیمم نسبی  
 $[f]$  در  $a$  پیوسته



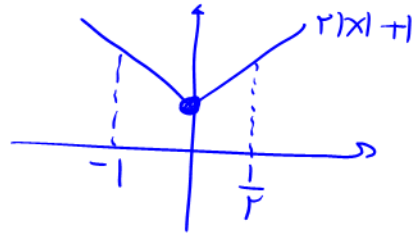
(۲) عامل صفر کننده باعث پیوستگی می شود. مثلاً تابع  $f(x) = [x]$  در  $x = 1$  ناپیوسته

ولی  $g(x) = (x - 1)[x]$  در  $x = 1$  پیوسته است.

صَوْتٌ	تَابِئَةٌ
[عَنْصَج]	صَوْتٌ : صَوْتٌ
[صَوَج min]	تَابِئَةٌ : تَبَوُّجٌ
[صَوَج] كَالصَّغْرِ	عَدَاةٌ كَالصَّغْرِ : max

**مثال:** پیوستگی تابع  $f(x) = (2x^2 - x - 1)[2|x| + 1]$  را در نقاطی به طول های  $\frac{1}{3}$ ،  $-\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{2}$ ،  $0$ ،

۱- بررسی کنید.



$x = \frac{1}{3}$ :  $\left[ \begin{array}{l} \text{کلاس صغیر} \\ \text{صغیر} \end{array} \right] \Rightarrow$  نابسته  
پیوستگی ندارد

$x = -\frac{1}{2}$ :  $[ ] \Rightarrow$  پیوستگی دارد

$x = \frac{1}{2}$ :  $[ ] \Rightarrow$  پیوستگی دارد

$x = 0$ :  $[ ]_{\min} \Rightarrow$  پیوستگی دارد

$x = -1$ :  $[ ]_{\text{نزدیک}} \Rightarrow$  نابسته / پیوستگی ندارد

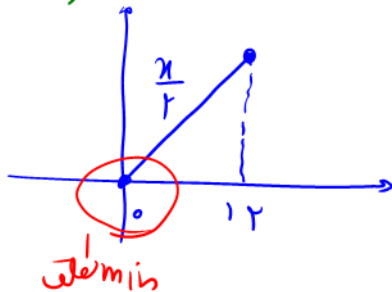
مثال : نقاط ناپیوسته‌ی تابع  $f(x) = (x^2 - 8x + 12) \left[ \frac{x}{2} \right]$  را در بازه‌ی  $[0, 12]$  بیابید.

$$\frac{x}{2} = k \Rightarrow x = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(x-2)(x-6)$$

$$x = \cancel{0}, \cancel{2}, \cancel{4}, \cancel{6}, 8, 10, 12$$

صفر



$$\{4, 8, 10, 12\}$$

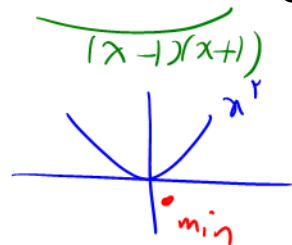
$$x=0 : \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{x}{2} \right] \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} 0 \rightarrow 0 \\ 0+ \rightarrow 0 \end{array} \quad \checkmark$$

$$x=12 : \left[ \frac{x}{2} \right] \left\{ \begin{array}{l} 12 \rightarrow 6 \\ 12^- \rightarrow 5 \end{array} \right.$$

**مثال :** تابع  $f(x) = (x^2 - 1)[x^2]$  در بازه  $[-1, a]$  پیوسته است. بیشترین مقدار ممکن  $a$  را

بیابید.

$$x^2 = k \rightarrow x = \pm \sqrt{k}$$



$$a = \cancel{-1}, \cancel{0}, \cancel{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots$$

$\min$   
 مجموعه  
 ماز صفر

مابوده  $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots\}$

$$a \leq \sqrt{2}$$

## بررسی پیوستگی توابع بدون جزء صحیح

(۱) نقاط مرزی توابع چندضابطه‌ای را بررسی کنید.

(۲) نقاطی که در دامنه‌ی تابع نیستند، تابع در آنها ناپیوسته است.

(۳) نقاط انتهایی دامنه، یعنی نقاطی که تابع در یک طرف آن تعریف نشده و نقاطی که تابع در هر دو طرف آن تعریف نشده، نقاط ناپیوسته هستند.

## چند قضیه :

(۱) اگر  $f$  و  $g$  در  $a$  پیوسته باشند، تمام توابع  $f \pm g$ ،  $fg$  و  $\frac{f}{g}$  نیز در  $a$  پیوسته‌اند. (مخرج

مخالف صفر)

(۲) اگر  $f$  در  $a$  پیوسته و  $g$  در  $a$  ناپیوسته باشد، توابع  $f \pm g$  و  $\frac{g}{f}$  در  $a$  ناپیوسته‌اند.

(۳) اگر  $f$  در  $a$  پیوسته و غیر صفر و  $g$  در  $a$  ناپیوسته باشد، توابع  $fg$  و  $\frac{f}{g}$  در  $a$  ناپیوسته‌اند.

$$\begin{array}{l} \text{ناپیوسته} + \text{ناپیوسته} \rightarrow \text{ناپیوسته} \\ \text{ناپیوسته} \times \text{پیوسته غیر صفر} \rightarrow \text{ناپیوسته} \\ \frac{\text{ناپیوسته}}{\text{پیوسته}} \rightarrow \text{ناپیوسته} \end{array}$$

۳۳- به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} 3x-6 & x > 2 \\ x-\sqrt{x+2} & x \leq 2 \end{cases}$  بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

(سراسری ریاضی ۹۸)

۳ (۴)

۲/۵ (۳) ✓

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \frac{3}{1 - \frac{1}{\sqrt{x+2}}} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6$$

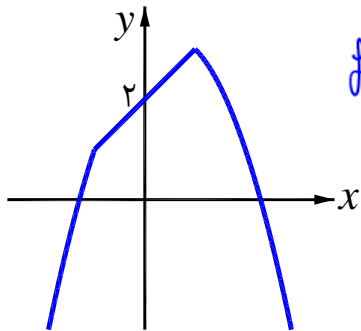
$$f(2) = f(2^-) = 2a - 1$$

$$2a - 1 = 6 \rightarrow a = \frac{7}{2}$$



۳۴- نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} ax+b & |x| \leq 1 \\ c+x-x^2 & |x| > 1 \end{cases}$  در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار  $f(2)$  کدام

$$f(0) = 2 \rightarrow b = 2$$



$$f(x) = \begin{cases} ax+2 & -1 \leq x \leq 1 & \frac{2}{2} \text{ (۲)} \\ c+x-x^2 & |x| > 1 & \text{صفر (۴)} \end{cases}$$

است ؟

۱ (۱) ✓

$\frac{1}{2}$  (۳)

$$n=1 \rightarrow a+2 = c+1-1$$

$$n=-1 \rightarrow -a+2 = c-1-1$$

$$\rightarrow \begin{cases} a-c = -2 \\ a+c = 2 \end{cases}$$

$$a=1, c=3$$

$$f(2) = c+2-2 = 3+2-2 = 3$$

۳۷

۳۵- اگر  $f(x) = \begin{cases} (x-c)[x] & |x-2| < 1 \\ ax+b & |x-2| \geq 1 \end{cases}$  در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته باشد، مقدار  $f(7)$

$$|x-2| < 1 \rightarrow -1 < x-2 < 1 \rightarrow 1 < x < 3$$

کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

$f(x) = \begin{cases} (x-c)[x] & 1 < x < 3 \\ ax+b & x \leq 1 \text{ یا } x \geq 3 \end{cases}$   $x=2$  ناپیوسته به کل مغرباً زار  $\rightarrow [x]$

$\hookrightarrow \boxed{c=2}$

$$f(1^+) = (x-2)[x] = (-1)(1) = -1$$

$$f(1) = f(1^-) = a+b$$

$$\rightarrow a+b = -1$$

$$f(3^-) = (x-2)[x] = (3-2)(2) = 2$$

$$\rightarrow 3a+b = 2$$

$$f(3) = f(3^+) = 3a+b$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \end{array} \right\}$$

$$f(7) = \frac{3 \cdot 7 - 5}{2} = 1$$

۷۴

۱۳۶- تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + a}}{x^2 + ax + 1}$  در  $\mathbb{R}$  پیوسته است. مجموعه‌ی مقادیر  $a$  کدام است؟

$$a \leq 1 \quad (۴)$$

$$1 \leq a < 2 \quad (۳)$$

$$-2 < a \leq 1 \quad (۲)$$

$$-2 < a < 2 \quad (۱)$$

$$x^2 + 2x + a \geq 0$$

$$\Delta' \leq 0$$

$$1 - a \leq 0 \rightarrow a \geq 1$$



فرض کنیم  $\Delta = a^2 - 4 < 0 \rightarrow -2 < a < 2$

$$\cap \rightarrow 1 \leq a < 2$$

۳۷- تابع  $f(x) = [x^2 - 4x]$  در نقاط  $x = 1$  و  $x = 2$  به ترتیب ...

(۱) پیوسته است ، فقط پیوستگی چپ دارد.

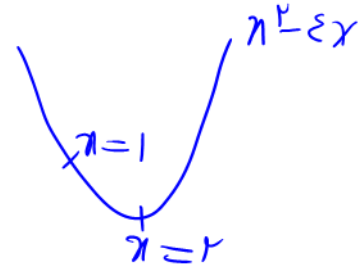
(۲) فقط پیوستگی راست دارد ، فقط پیوستگی چپ دارد.

(۳) پیوسته است ، فقط پیوستگی راست دارد.

(۴) فقط پیوستگی چپ دارد ، فقط پیوستگی راست دارد.

$x=1 \rightarrow$  [صغری]   
  $\left[ \begin{array}{c} \text{صغری} \\ \text{تیزی} \end{array} \right]$    
  $\left[ \begin{array}{c} \text{نویسم} \\ \text{د} \end{array} \right]$

$x=2 \rightarrow$  [بزرگی]   
  $\left[ \begin{array}{c} \text{بزرگی} \\ \text{min} \end{array} \right]$    
  $\left[ \begin{array}{c} \text{نویسم} \\ \text{ب} \end{array} \right]$



۳۸- تابع  $f(x) = (2x^2 + x - 1)[-x]$  در کدام بازه پیوسته است؟

$(-2, 0]$  (۴) ✓

$[-2, 0)$  (۳) ✗

$[0, 2)$  (۲) ✗

$(0, 2]$  (۱) ✗

$$f(x) = (x+1)(2x-1)[-x]$$

در  $x = -1$  پیوسته است

در  $x = 1$  ناپیوسته است

(۳)  $\begin{cases} f(+2) = 5 \times 2 \\ f(-2+) = 0x[2^-] = 0x1 \end{cases}$  ناپیوسته

(۴)  $\begin{cases} f(0) = -1 \times 0 = 0 \\ f(0^-) = -1x[0^+] = 0 \end{cases}$  پیوسته

۳۹- تابع  $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)[\sqrt{2x}]$  در بازه  $[0, a]$  پیوسته است. بیشترین مقدار  $a$  کدام است؟

۴ (۴)

۴/۵ (۳)

۲ (۲)

۱۸ (۱)

$$(x-2)(2x-1)$$

$$\sqrt{2x} = k \rightarrow x = \frac{k^2}{2}$$

$x = 0$  ~~۰~~  $\frac{1}{2}$ ,  $2$ ,  $\frac{9}{2}$ ,  $1$ ,  $\frac{25}{2}$ , ...  
 کاملاً منفی پیوسته  
 نامنظم

$$f(0) = 0$$

$$f(0+) = 0$$

$$a \leq \frac{9}{2}$$

۱۴۰- تابع  $f(x) = \left[\frac{2x}{3}\right]$  در بازه  $[3, 12]$  دارای چند نقطه‌ی ناپیوستگی است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

$$\frac{2n}{3} = k \rightarrow n = \frac{3k}{2}$$

$n = \cancel{12}, \left(\frac{9}{2}, 9, \frac{15}{2}, 9, \frac{21}{2}, 12\right)$  → ناپیوستگی

مجموع  $\frac{2n}{3} \rightarrow n = 12$  ناپیوستگی ✓

$n = 12$  ناپیوستگی ✗

# آزمون:

۴۱- اگر بازه‌ی  $(a-1, 2a+1)$  یک همسایگی نقطه‌ی ۲ و زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی تعریف

تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{64 - x^2}$  باشد، محدوده‌ی تغییرات  $a$  کدام است؟

$$\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2} \quad (۴)$$

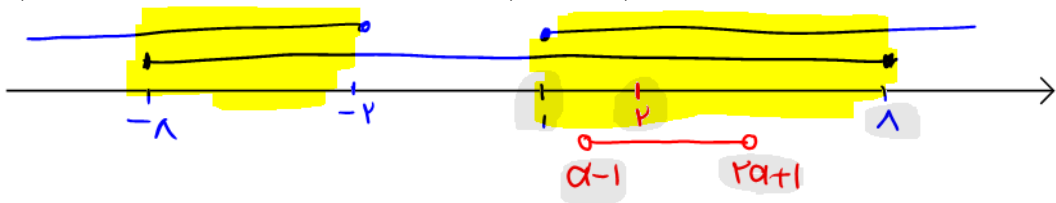
$$2 \leq a < 3 \quad (۳) \quad \checkmark$$

$$-\frac{1}{2} < a < \frac{7}{2} \quad (۲)$$

$$1 \leq a < 3 \quad (۱)$$

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$64 - x^2 \geq 0$$



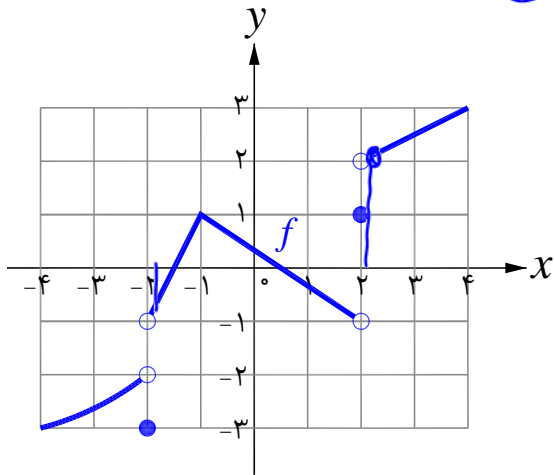
$$\underbrace{1 \leq a-1 < 2}_{\text{from (1)}} \quad \underbrace{2 < 2a+1 \leq 1}_{\text{from (3)}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \leq a \\ a < 3 \\ \frac{1}{2} < a \\ a \leq \frac{7}{2} \end{array} \right.$$

$$\cap \rightarrow 2 \leq a < 3$$



۱۴۶- با توجه به شکل، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(3x - x^2) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(\frac{x}{2})$  کدام است؟

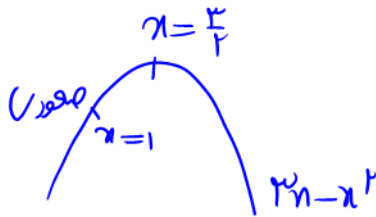


(۲) -۲

(۴) صفر

(۱) ۱

(۳) -۳



$$f(2^+) + f(-2^+) = 2 - 1 = 1$$

۱۳- اگر تابع  $f$  در نقطه‌ی  $x=1$  دارای حد باشد و  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 3x}{f(x) - 1} = 6$  باشد، حاصل

$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + \sqrt{f(x) + x})$  برابر کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L \rightarrow \frac{L^2 + 3}{L - 1} = 6 \rightarrow L^2 - 6L + 9 = 0 \rightarrow L = 3$$

$$2 + \sqrt{L + 1} = 2 + \sqrt{4} = 4$$

(سراسری تجربی ۹۷)

۱۴۴- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1}$  کدام است؟

-۷۲ (۴)

-۸۴ (۳)

-۹۶ (۲)

-۱۱۲ (۱)

(۱۴)

$$\frac{9x - 10}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{18}{-\frac{1}{2}} = -112$$

$$\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2$$

۱۴۵- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2x+1}{x+\sqrt{x}-2} \right)$  برابر کدام است؟

$$-\frac{1}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۳)}$$

$$-1 \text{ (۲)} \quad 1 \text{ (۱)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t-1} - \frac{2t^2+1}{t^2+t-2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+2-2t^2-1}{(t-1)(t+2)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{-2t^2+t+1}{t^2+t-2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-4t+1}{2t+1} = \frac{-3}{3} = -1$$

۱۴۶- حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - x)(x^4 + 3x + 2)}{(x+1)^2 \sqrt{3x+7}}$  برابر کدام است؟

$\overset{0}{x^3 - x}$      $\overset{0}{x^4 + 3x + 2}$      $\overset{0}{(x+1)^2}$      $\overset{2}{\sqrt{3x+7}}$      $\overset{1}{( )}$   
 ۲ (۲)    ۲ (۲)    ۲ (۲)    ۲ (۲)    ۱ (۱)

$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x + 2}{x+1} = \frac{1}{2} (4)(-1) = -1$

$\frac{x(x^2 - 1)}{x+1}$

$x(x-1)$

$(-1)(-2) = 2$

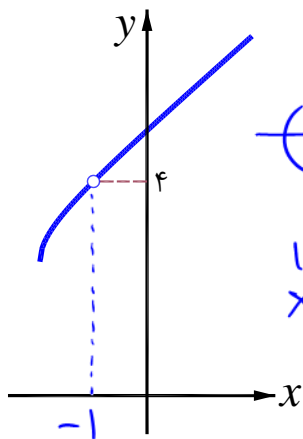
H

$\frac{1 + 3x^3}{1}$

$1 + 3(-1)$

$= -1$

۱۴۷- شکل روبه‌رو نمودار تابع  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + \sqrt{x+2}}$  است. مقدار  $b$  کدام است؟



$$x + \sqrt{x+2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \varepsilon \quad \frac{1-a+b}{0} \Rightarrow 1-a+b=0 \quad a=b+1$$

$$\frac{0}{0} \rightarrow H$$

$$\frac{2x+a}{1 + \frac{1}{\sqrt{x+2}}} = \frac{a-2}{1 + \frac{1}{r}} = \frac{r}{r}(a-2)$$

$$\frac{r}{r}(a-2) = \varepsilon \quad a=1, b=7$$

۷ (۲) ✓

۸ (۱)

۵ (۴)

۶ (۳)

برابر کدام است؟  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2[2x] + [-x] + 2}{\left|1 + \frac{1}{x}\right|}$  حاصل -۴۸

۴ (۴)

۶ (۳)

-۴ (۲)

-۶ (۱)

$$-1^- : [2x] = [-2^-] = -2, \quad [-x] = [1^+] = 1$$

$$-1^- : \left|1 + \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x+1}{x}\right| = \left|\frac{\ominus}{\ominus}\right| = 1^{\oplus}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-2x^2 + 2}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-2(x-1)(x+1)x}{\cancel{x+1}} = -6$$

۴۹- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x+2| - |3x-2|}{\sqrt{2} - \sqrt{4-x^2}}$  برابر کدام است؟

⊕

⊖

۴ (۴)

-۴ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

$$\frac{x+2+3x-2}{\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2}} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}}{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}} = \frac{4x}{\sqrt{4-(4-x^2)}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}}{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}}}_{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}} = 2}$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{|x|} = 2(-1) = -2$$




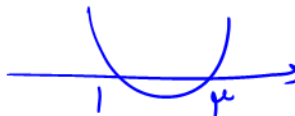
۵۰- در مورد حد تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \left[\frac{4}{x}\right]$  در نقطه‌ی  $x=1$  کدام گزاره درست است؟

(۱) حد راست دارد و برابر ۳ است.

(۲) حد راست دارد و برابر ۴ است.

(۳) حد چپ دارد و برابر ۳ است.

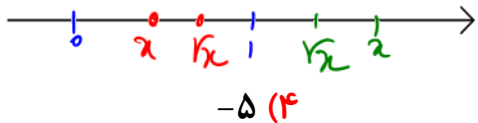
(۴)  حد چپ دارد و برابر ۴ است.

$$(x-1)(x-3) \geq 0 \quad \xrightarrow{\quad} \quad x \leq 1 \text{ یا } x \geq 3$$


صیغی:  $x \rightarrow 1^+$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 + \left[\frac{\varepsilon}{1^+}\right] = [\varepsilon^+] = \varepsilon$$

برابر  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(\sqrt{x} - x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(\sqrt{x} - x)$  حاصل، باشد،  $f(x) = \begin{cases} \frac{[4-x]}{x-1} & x > 0 \\ x & \text{اگر } -5 \\ \frac{x}{|1-\sqrt{x+1}|} & x < 0 \end{cases}$



کدام است ؟

$$f(0^-) - f(0^+)$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$-2 \quad \quad -3$$

$$(-2) - (-3) = 1$$

5 (3)

-1 (2)

1 (1)

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|1-\sqrt{x+1}|} \times \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|1-(x+1)|} \times |1+\sqrt{x+1}|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} \times 1 = -2$$

$$f(0^+) = \frac{[4-0]}{0-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

۵۲- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x \sin 4x}{1 + \cos x}$  کدام است؟

۴ (۴)

۸ (۳)

-۸ (۲)

-۴ (۱)

$$\frac{\sin x \cdot \cancel{2} \sin 2x \cdot \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\frac{(1 - \cos^2 x) \cdot \cancel{2} \cos x \cos x}{1 + \cos x} = (1 - \cos x) (\cancel{2} \cos x \cos x)$$

$$= 2 (\cancel{2} (-1)(1)) = -1$$

۵۳- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 - \cos x} - \frac{4}{1 - \cos 2x} \right)$  برابر کدام است ؟

$$-\frac{1}{2} \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$-1 \quad (۲)$$

$$\downarrow \quad (۱) \\ 1 - \cos 2x$$

$$\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{4}{1 - \cos 2x} = \frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{1 - \cos x}$$

$$= \frac{1 + \cos x - 2}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{-1}{1 + \cos x}$$

$$x \rightarrow 0 : \frac{-1}{2}$$

۵۴- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x + 3 \sin x - 2}{\cos^2 x}$  کدام است؟

$$\frac{2}{2} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۳)} \quad \checkmark$$

$$2 \text{ (۲)}$$

$$1 \text{ (۱)}$$

$$\frac{1 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2}{1 - \sin^2 x}$$

$$\sin x = t \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2} : t \rightarrow 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{-2t^2 + 3t - 1}{1 - t^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \frac{-4t + 3}{-2t} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

۵۵- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos \sqrt{x}}}{\sqrt{1-x} - 1}$  کدام است؟

$$\frac{1}{2} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۱)}$$

$$\cos^n u \sim 1 - n \frac{u^n}{r} \quad u \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{r} \cdot \frac{(\sqrt{x})^r}{r}\right)}{\sqrt{1-x} - 1} = \frac{\frac{1}{2} x}{\sqrt{1-x} - 1} \quad \times \frac{\sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{1-x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} x (\sqrt{1-x} + 1)}{\cancel{1-x} - 1} = \frac{\frac{1}{2} (1+1)}{-1} = -\frac{1}{2}$$

۹۴

ویژه رشته ریاضی

(سراسری ریاضی فارغ ۹۷)

۵۶- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x - \sin 2x}{\sqrt{2+2\cos x}}$  ، کدام است ؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

$$x - \pi = t \rightarrow x = \pi + t$$

$$x \rightarrow \pi^+ : t \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi+t) - \sin(2\pi+t)}{\sqrt{2+2\cos(\pi+t)}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\sin t + \sin 2t}{\sqrt{2-2\cos t}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-t + 2t}{\sqrt{2-2(1-\frac{t^2}{2})}} = \frac{2t}{\sqrt{t^2}} = \frac{2t}{|t|} = 2$$

(سراسری ریاضی فارغ ۹۱)

۵۷- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$  کدام است؟

(۴) صفر

(۳)  $\frac{1}{6}$

(۲)  $\frac{1}{3}$

(۱)  $\frac{1}{2}$  ✓

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \sim \frac{x^3}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\tan x - \sin x = \tan x \left( 1 - \frac{\sin x}{\tan x} \right) = \tan x (1 - \cos x)$$

$$x \rightarrow 0 : x \left( 1 - \left( 1 - \frac{x^2}{2} \right) \right) = x \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}$$



۵۸- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \frac{\sin x}{x} + 2 \frac{\tan x}{x})$  کدام است؟

$x \rightarrow 0$

۴ (۴)

۳ (۳) ✓

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1^-$$

$$\frac{\tan x}{x} \rightarrow 1^+$$

$$[1^-] + 2[1^+] =$$

$$1 + 2(1) = 3$$

۵۹- کدام یک از حدهای زیر درست است؟

(۱)  $\frac{0}{0} \rightarrow 1 + \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{1 + \frac{1}{0^+}}{-1} = -\infty$


X  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1 + \sqrt{x^2-x}}{1-x} = +\infty$  (۱)

(۲)  $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)(x+2)(x-1)$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2} = +\infty$  (۲) ✓

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

X  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-4}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$  (۳)

(۴)   $\Rightarrow \frac{-2}{0^-} = +\infty$

X  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + \cos x - 2}{\sin^2 x} = -\infty$  (۴)

$\hookrightarrow 1 - \cos x$

(۵)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6x-1)(6x+1)}{(1-6x)(1+6x)} = -1$

۴۰- اگر  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{p}} \frac{2x-a}{bx-2x^2+c} = -\infty$  باشد، کدام درست است؟

$a > 2, b = -2$  (۴)   
  $a < 2, b = -2$  (۳)   
  $a > 2, b = 2$  (۲)   
  $a < 2, b = 2$  (۱)

مخرج  $-2(x - \frac{1}{p})^2 = -2a^2 + 2x - \frac{1}{\varepsilon}$

$b = 2$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{p}} \frac{\varepsilon x - a}{-2(x - \frac{1}{p})^2} = \frac{2-a}{0} = -\infty \rightarrow 2-a > 0$$

$a < 2$

۶۱- مجموع مقادیر صحیح  $a$  که  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{a + \sqrt{|x|}}{|x| - 2} = -\infty$  باشد، کدام است؟

۱۹ (۴)

۱۷ (۳)

۱۵ (۲) ✓

۱۳ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{a + \sqrt{|x|}}{\underbrace{-x - 2}_{\text{ترا}}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow -2^+ : \frac{a + \sqrt{|-2^+|}}{0^-} = \frac{a - 2}{0^-} = -\infty \Rightarrow a - 2 > 0 \\ x \rightarrow -2^- : \frac{a + \sqrt{|-2^-|}}{0^+} = \frac{a - 2}{0^+} = -\infty \Rightarrow a - 2 < 0 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{n} \quad 2 < a < 4 \rightarrow a = 3, 1$$

۶۲- اگر  $f(x) = \frac{2ax+1-2\sqrt{x^2+2}}{ax-1}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  باشد، حد تابع  $f$  در نقطه‌ای که در دامنه‌ی

تعریف تابع نیست برابر چقدر است؟

$$\frac{11}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{2ax-2x}{ax} = \frac{2a-2}{a} = 1 \rightarrow \underline{a=2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+2}}{2x-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \frac{2-2 \left( \frac{2}{2\sqrt{x^2+2}} \right)}{2} =$$

$$2 - \frac{2}{\sqrt{x^2+2}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{1+2}} = \frac{5}{2}$$

۳-۶ اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(2x+1) - 2f(x)$  کدام است؟

(۴) صفر

(۳)  $\frac{1}{4}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۱) ۱

$$\sqrt{(2x+1)^2 + (2x+1)} - 2\sqrt{x^2 + x}$$

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 1 + 2x + 1} - \sqrt{4x^2 + 4x} = \cancel{2x} - \cancel{2x}$$

$x \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{4x^2 + 4x + 1} - \cancel{4x^2 + 4x}}{\sqrt{4x^2 + 4x + 1} + \sqrt{4x^2 + 4x}} \stackrel{\text{توان}}{=} \frac{1}{2x + 2x} = \frac{1}{4}$$

۶۴- فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$  حاصل  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$  ، کدام است ؟ (سراسری ریاضی فارج ۹۹)

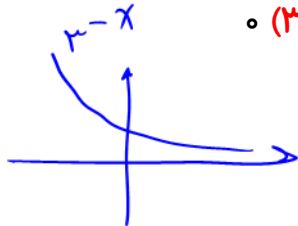
$$-\frac{1}{2} \quad (۴)$$

• (۳)

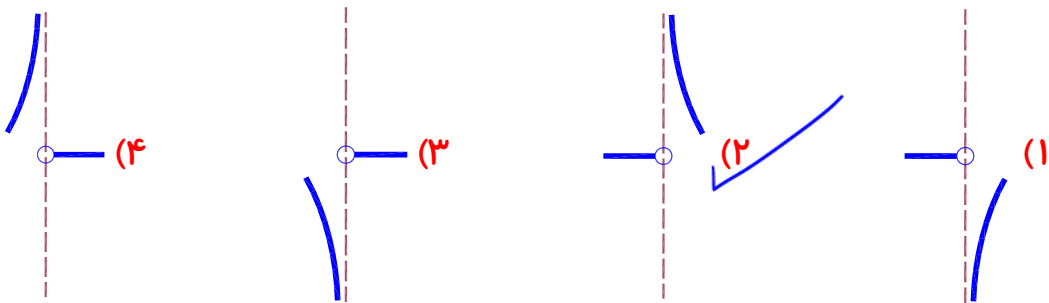
$$\frac{1}{2} \quad (۲) \quad \checkmark$$

$+\infty$  (۱)

$$3^{-\infty} = 0$$



۶۵- نمودار تابع  $f(x) = \frac{1+[-x]}{x-x^2}$  در همسایگی  $x=1$  به کدام صورت است؟



$$x \rightarrow 1^+ : \frac{1+[-x]}{x(1-x)} = \frac{1-1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = +\infty$$

$$x \rightarrow 1^- : \frac{1+[-x]}{x(1-x)} = \frac{1-1}{0^+} = \frac{0}{0^+} = 0$$

۱۰۴



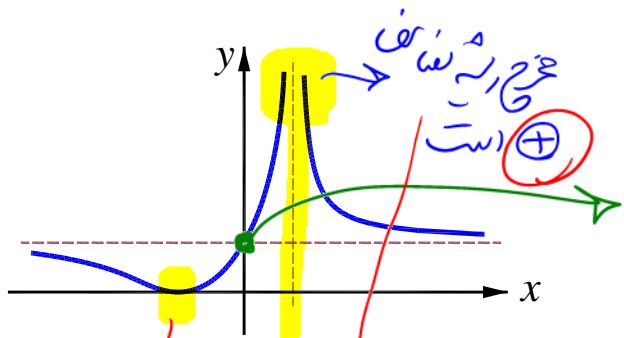
۴۴- نمودار تابع  $f(x) = \frac{2x^2 + 11x + a}{x^2 - bx + c}$  در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار  $f(2)$  کدام است؟

۳۲ (۲)

۲۴ (۱)

۵۰ (۴) ✓

۴۸ (۳)



ی = f(0) ⇒ ۲ =  $\frac{a}{c}$  → ۱  
 → c = ۴

$2x^2 - bx + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0$

b = 4

$2x^2 + 11x + a = 0$

$x^2 + 4x + \frac{a}{2} = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow \frac{a}{2} = 4 \rightarrow a = 8$

۱۰۵

$f(x) = \frac{2x^2 + 11x + 8}{x^2 - 4x + 4}$   
 $= \frac{2(x+2)^2}{(x-2)^2} \rightarrow f(2) = 50$

۴۷- اگر  $f$  یک تابع درجه دوم و نمودار تابع  $y = \frac{f(x)}{2x^2 - x - 1}$  به صورت زیر باشد، عرض رأس  $f$

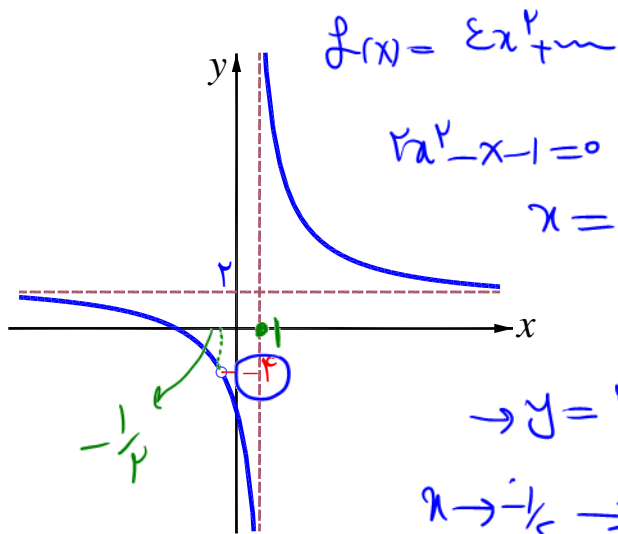
کدام است؟

-۶ (۱)

-۷ (۲)

-۸ (۳)

-۹ (۴) ✓



$$y = \frac{r(x + \frac{1}{2})(x + k)}{(2x + 1)(x - 1)}$$

$$\rightarrow y = \frac{r(x + k)}{x - 1}$$

$$x \neq -\frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{r(-\frac{1}{2} + k)}{-\frac{3}{2}} = -\infty \rightarrow k = \frac{r}{2}$$

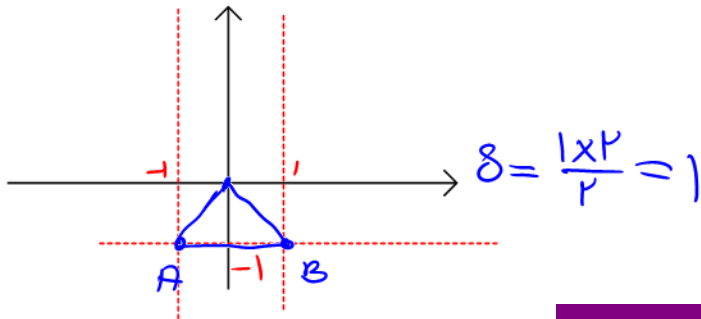
$$106 \quad f(x) = r(x + \frac{1}{2})(x + \frac{r}{2}) = (2x + 1)(2x + r) \quad x_0 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{r}{2}}{2} = -2 \rightarrow f(-2) = -9$$

۶۸- مجانب‌های تابع  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} - \frac{x^3}{x^2-x}$  در دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  متقاطع‌اند. اگر  $O$  مبدأ

مختصات باشد، مساحت مثلث  $OAB$  چقدر است؟

$$f(x) = \frac{x^3 \cdot x - x^3 \cdot (x+1)}{(x-1)(x+1)x} = \frac{x^3(-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-x^2}{x^2-1}$$

مختصات  
 نقاط:  $x=1, x=-1$   
 خط  $y=-1$



۶۹- نمودار تابع  $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 6x + m}$  فقط دو خط مجانب دارد. مجموع مقادیر  $m$  کدام است؟

۱۴ (۴)

-۲ (۳)

-۷ (۲)

-۱۱ (۱)

چون  $x \rightarrow \pm\infty$  :  $\frac{x^2}{x^2} = 1 \rightarrow y = 1$

در این صورت باید خط  $y = 1$  را در نظر بگیریم.

$$x^2 - 6x + m = 0$$

$$\textcircled{1} \quad x^2 - 6x + m = (x-3)^2 \rightarrow m = 9$$

فرض کنیم  $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$\begin{cases} x=1 \rightarrow 1-4+m=0 \rightarrow m=3 \\ x=-2 \rightarrow 4+12+m=0 \rightarrow m=-16 \end{cases}$$

۷۰- به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

در  $x = \frac{\pi}{2}$  پیوسته است؟

(سراسری تبریز کشور ۹۹)

۱/۵ (۴) ✓

-۱ (۳)

۱ (۲)

۱/۵ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2\delta^2 - \delta - 1}{1 - \delta^2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta - 1}{-\delta} = -\frac{1}{2}$$

۷۱- اگر  $f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 2 \\ ax^2+x-10 & x > 2 \end{cases}$  در  $x=2$  پیوسته باشد، عرض نقطه‌ی تلاقی نمودار تابع  $f$

$$f(2) = f(2^-) = 2a + b$$

با خط  $x = -1$  کدام است؟

۳۰ (۴)

۲۸ (۳)

۲۴ (۲)

۲۲ (۱)

$$f(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax^2+x-10}{\sqrt{x+2}-2} = \frac{2a-1}{0} \Rightarrow 2a-1=0 \Rightarrow a=2$$

$$\frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = 24 \rightarrow 2a+b=24$$

$$\rightarrow b=20$$

$$110. f(-1) = -a+b = -2+20=18$$

۷۲- فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & |x-1| \geq 1 \end{cases}$  یک تابع همواره پیوسته باشد، مقدار  $a$  کدام

$$|x-1| \rightarrow -1 < x-1 < 1$$

(سراسری ریاضی ۹۹)

$$0 < x < 2$$

است؟

$$\frac{5}{2} \quad (۴)$$

$$1 \quad (۳)$$

$$-1 \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۱)$$

$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \end{cases}$   $f$  در  $x=1$  پیوسته است (در این صورتها پیوسته است)

$$f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow b = 0 = b \rightarrow b = 0$$

$$f(2^-) = f(2^+) = f(2) \rightarrow (2-1)(1) = 4 + 2a + \frac{b}{0} \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۱۱۱

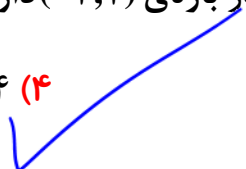
۷۳- تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \in \mathbb{Z} \\ x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$  چند نقطه‌ی ناپیوسته در بازه‌ی  $(-3, 4)$  دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)



در نقاط  $x = 0$  و  $x = 1$  پیوسته است

در نقاط  $x = 2, 3, 4$  ناپیوسته است

در نقاط  $x = 0, 1, 2, 3, 4$  پیوسته است

در نقاط  $x = -1, 0, 1, 2, 3, 4$  ناپیوسته است

$$x = x^2 - 2$$

$$\rightarrow x = -1, 2$$

۳، ۱، ۰ و ۲



۷۴- اگر  $f(x) = (x^2 - 7x + 12)[\sqrt{x+1}]$  بر بازه‌ی  $[0, k]$  پیوسته باشد، بیشترین مقدار  $k$  کدام

$$(x-3)(x-4)$$

است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۸ (۲)

۱۵ (۱)

$$\sqrt{x+1} = n \in \mathbb{Z} \rightarrow x = n^2 - 1$$

$$x = \textcircled{0}, \cancel{3}, \cancel{4}, 8, 15, \dots \rightarrow \underline{k=11}$$

۴  
 در ۰ پیوسته است  
 و پیوسته است

۳  
 در ۳ و ۴  
 پیوسته

۷۵- تعداد نقاط ناپیوسته‌ی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = [x - \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]$  ، در بازه‌ی  $[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}]$  ، کدام

(سراسری ریاضی فارغ ۹۷)

است ؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲) ✓

۲ (۱)

$$f(x) = [x - \frac{1}{3}] + [x - \frac{1}{2} + 1]$$

$$-\frac{5}{6} \leq x \leq \frac{5}{6} \rightarrow -2 \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{5}{6}$$

$$g(t) = [t] + [t+1]$$

$$-2 \leq t \leq \frac{5}{6}$$

$$= 2[t] + 1$$

$$t = \cancel{-2}, -1, 0, 1$$

$[t]$    
  $\downarrow$    
  $\{0, 1, 2\}$