



کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل یازدهم : حد و پیوستگی

مهرداد عباسپور

همسایگی

(الف) به هر بازه‌ی باز شامل نقطه‌ی x_0 یک همسایگی نقطه‌ی x_0 می‌گوییم.



(ب) همسایگی محذوف x_0 یعنی $(a, b) - \{x_0\} = (a, x_0) \cup (x_0, b)$



(پ) همسایگی راست x_0 یعنی $(x_0, x_0 + r)$



(ت) همسایگی چپ x_0 یعنی $(x_0 - r, x_0)$



۱- اگر $(2x+1, x-1) \cup (3x+3, x-3)$ یک همسایگی محذوف باشد، مقدار x کدام است؟

۴ (۴)

-۴ (۳)

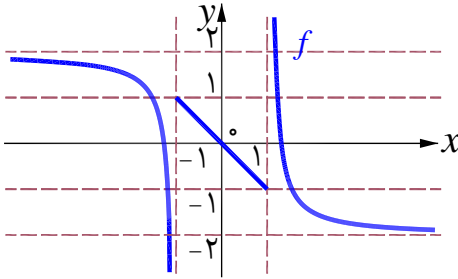
۲ (۲)

-۲ (۱)



مفاهیم ابتدایی حد

۲- با توجه به شکل، حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^+} f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x))$ برابر کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۳
(۴) -۳

۳- اگر f یک تابع خطی و $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x+1}{f(x)+1} = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 3} fof(x) = 6$ باشد، عرض از مبدأ f کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) -۲
(۴) -۱

محاسبات حد کسری وقتی حد صورت و مخرج صفر باشد

(۱) انواع محاسبات جبری برای از بین بردن عامل صفر کننده از صورت و مخرج

(۲) قاعده‌ی هوییتال فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

البته به شرط اینکه حد سمت راست موجود (یا بی‌نهایت) باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + \sqrt{x+2})(x - \sqrt[3]{x^3 + x - 2})}{4 - x^2}$$

مثال:

(۳) قاعده‌ی کم‌توان: در حدهایی که صورت یا مخرج کسر مجموع چندین عامل

صفر باشد، کافی است فقط جملاتی را قرار دهیم که توان عامل صفر کننده کمتر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt[3]{x + 2x^2}}{\sqrt[3]{8x + x^3}}$$

مثال:

(۴) مسئله‌های معروف به صورت $\frac{A}{0} \pm \frac{B}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{x - 2}{x^2 - x} \right)$$

مثال:



نکته‌ی مهم :

اگر حد یک کسر موجود و حد مخرج صفر باشد، حتماً حد صورت کسر هم صفر است.
(نقطه‌ی تو خالی روی نمودار تابع)

مثال : اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^3 + bx}{x^2 + x - 12} = 18$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

(سراسری ریاضی ۹۹)

۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}}$ ، کدام است ؟

- (۱) $-1/5$ (۲) $-1/2$ (۳) $-5/8$ (۴) $-5/6$

(سراسری تجربی ۹۳)

۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$ کدام است ؟

- (۱) $-\frac{17}{12}$ (۲) $-\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{12}$

۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$ برابر کدام است ؟

- (۱) -1 (۲) 2 (۳) ∞ (۴) صفر

۷- اگر $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x^4 + 5x - 6}{x^2 + x - 2}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ برابر کدام است ؟

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) 9 (۴) -9

۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{ax+b} - 3}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{5}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است ؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

حدهای راست و چپ

(۱) معمولاً در توابعی که قدرمطلق دارند و حد عبارت داخل قدرمطلق صفر است،

نیاز است حد راست و چپ جدا شود.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 5x + 4|}{x^2 - 1}$$

مثال :

(۲) معمولاً در توابعی که جزء صحیح دارند و حد عبارت داخل آن عدد صحیح است،

نیاز است حد راست و چپ جدا شود.



(۳) اگر تعیین بیشتر یا کمتر بودن یک تابع در حدهای راست و چپ سخت شد، به

صعود یا نزولی بودن تابع مراجعه کنید :

$$\text{اگر } f \text{ اکیداً صعودی باشد: } \begin{cases} x \rightarrow a^+ : f(x) \rightarrow L^+ \\ x \rightarrow a^- : f(x) \rightarrow L^- \end{cases}$$

$$\text{اگر } f \text{ اکیداً نزولی باشد: } \begin{cases} x \rightarrow a^+ : f(x) \rightarrow L^- \\ x \rightarrow a^- : f(x) \rightarrow L^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} [\sqrt{6x+1}] \quad \text{مثال :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[-\frac{12}{x}\right] \quad \text{مثال :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [2x - x^2] \quad \text{مثال :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\delta - 2 \sin x] \quad \text{مثال :}$$

(۴) در حدهای ترکیبی براکت با سایر توابع اول مقادیر براکت را محاسبه و جای-

گذاری کنید و سپس حد را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - [2x]}{x^2 + [-x]} \quad \text{مثال :}$$

(۵) حد توابع چندضابطه‌ای در نقاط مرزی

(۶) حد توابع در نقاط انتهایی دامنه وجود ندارد. مثلاً $f(x) = \sqrt{x}$ در $x=0$ حد

ندارد.

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x + |x^2 + 3x - 4| + 4}{\sqrt{5-x} - 3}$ برابر کدام است ؟

(۱) -۳۶ (۲) -۲۴ (۳) ۲۴ (۴) ۳۶

۱۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} ([4 \cos 2x] + 2[2 \sin \frac{x}{4}])$ برابر کدام است ؟

(۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) صفر



۱۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{[x] - x[-2x]}{|x^3 + 1|}$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۲- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x[-x]+6}{4-x^2} & x > 2 \\ \frac{x-\sqrt{x+2}}{x^2+2x-8} & x < 2 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(5x - 3x^2)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ∞

حدهای مثلثاتی

(۱) استفاده از هم‌ارزی‌ها: وقتی $u \rightarrow 0$

$\sin u \sim u$	$\cos u \sim 1 - \frac{1}{2}u^2$	$\tan u - \sin u \sim \frac{1}{6}u^3$
$\tan u \sim u$	$\cos^n u \sim 1 - \frac{n}{2}u^2$	$(1+u)^n \sim 1 + nu$

(۲) وقتی $u \rightarrow 0$ ، معمولاً بهتره به جای $\cot u$ قرار بدیم $\frac{1}{\tan u}$ تا بتوانیم از هم‌ارزی‌ها

استفاده کنیم.

(۳) تغییر متغیر وقتی x به عدد غیر صفر میل کند.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \xrightarrow{x-a=t \Rightarrow x=a+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(a+t)$$

(۴) حتماً بلد باشید که در بازه‌ی $(0, \frac{\pi}{4})$: $\sin x < x < \tan x$ و همچنین:

$$x \rightarrow 0 : \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1^- , \frac{\tan x}{x} \rightarrow 1^+$$

ویژه رشته ریاضی



(سراسری ریاضی فارغ ۹۸)

۱۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) π (۳) 2π (۴)

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{(\cot x - \tan x)^2}{1 + \sin 2x}$ برابر کدام است؟

- ۸ (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴)

۱۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos x}}$ کدام است؟

- $-\sqrt{2}$ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \sin^2 2x}{x \tan 4x}$ کدام است؟

- $-\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

ویژه رشته ریاضی

(سراسری ریاضی ۹۳)

۱۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ ، کدام است؟

- $-\frac{3}{2}$ (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)

ویژه رشته ریاضی

۱۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \sin 3x)(\cot x - \cot 2x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴)

ویژه رشته ریاضی

حدهای نامتناهی

(۱) حالت اصلی حدهای بی‌نهایت:

$$A \neq 0 \Rightarrow \frac{A}{0^\pm} = \pm\infty$$

(۲) حد توابع تانژانت و کتانژانت در نقاطی که در دامنه‌ی تعریفشان نیست، بی‌نهایت

است. مثلاً:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$



(۳) حد تابع لگاریتمی در نقطه‌ی صفر، بی‌نهایت است :

$$a > 1 : \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty \quad , \quad 0 < a < 1 : \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

مثال : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - x - 2}$

مثال : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x] - 2}{\cos(\frac{\pi x}{4})}$

مثال : اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+b}{2x^2 + ax + b^2} = -\infty$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

۱۹- با توجه به توابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{1 - x^2}$ و $g(x) = \frac{[x]}{x}$ ، کدام حد درست محاسبه شده است ؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$

(۳) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

۲۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} \log_x^{(1-2x)}$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} \tan(\pi x)$ به ترتیب کدام است ؟

(۱) $+\infty$ و $+\infty$ (۲) $-\infty$ و $+\infty$ (۳) $+\infty$ و $-\infty$ (۴) $-\infty$ و $-\infty$

۲۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{[2x] - 2[x]}{x^2 - 4}$ و $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[2x] - 2[x]}{x^2 - 4}$ به ترتیب کدام است ؟

(۱) صفر و $+\infty$ (۲) صفر و $-\infty$ (۳) $-\infty$ و صفر (۴) $-\infty$ و صفر

حد در بی‌نهایت

در توابع کسری که صورت و مخرج توابع چندجمله‌ای یا ترکیب آنها با توابع رادیکالی است، برای محاسبه‌ی حد کافی است در صورت و مخرج فقط جملات پرتوان را قرار دهیم.

مثال : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x+1}{2-x} \right]$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 6x + 1})$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - \sqrt{x^2 + x}}{8x + 1}$

۲۲- اگر $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ کدام است ؟ (سراسری تهرانی تیرماه ۹۸)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۳



۲۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{2x + 1} - \frac{x^2 + x}{2x - 1} \right)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۲۴- اگر $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟ (سراسری تیربی ۹۱)

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) صفر

۲۵- اگر $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ و $g(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ باشد، مجموع حدهای راست و چپ تابع $g \circ f$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) ۲

۲۶- برای مقادیر طبیعی n ، چند مقدار مختلف برای حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^n + nx^3 + 7}{x^n + x^3}$ ممکن است و مجموع این مقادیر چقدر است؟

- (۱) سه مقدار، ۷ (۲) سه مقدار، ۱۱ (۳) چهار مقدار، ۱۲ (۴) چهار مقدار، ۱۳

مجانب‌ها

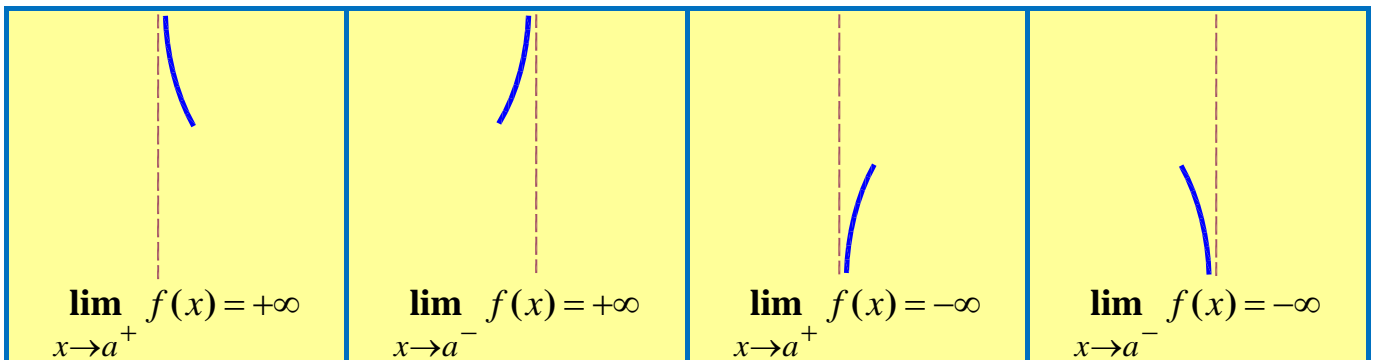
(۱) برای یافتن مجانب قائم باید ریشه‌های مخرج را بررسی کنیم. هر نقطه‌ای که حد راست یا چپ تابع بی‌نهایت باشد، مجانب قائم است.

(۲) تنها تابع غیر کسری که ما می‌شناسیم و مجانب قائم دارد، تابع لگاریتمی است.

(۳) برای یافتن مجانب افقی کافی است حد تابع را در $x \rightarrow \pm\infty$ حساب کنیم.

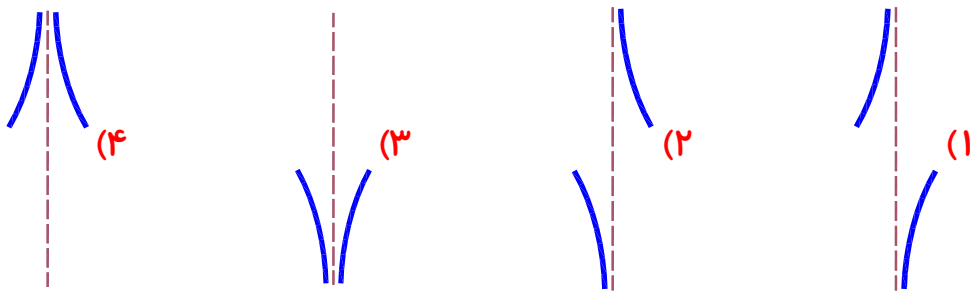
(۴) برای رسم نمودار تابع در اطراف مجانب قائم کافی است حدهای راست و چپ را

محاسبه کنیم.



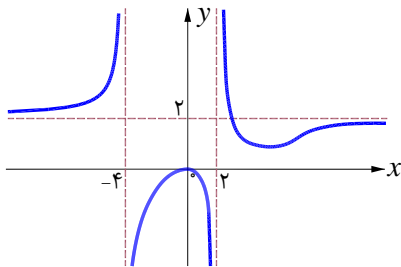


۲۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ در اطراف $x = -\pi$ به کدام صورت است؟



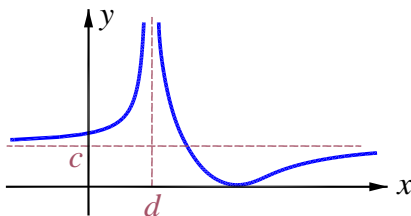
۲۸- اگر f یک تابع درجه دوم و نمودار تابع $y = \frac{x^2}{f(x)}$ مطابق شکل روبه‌رو باشد،

مقدار $f(-2)$ کدام است؟



- (۱) -۱
- (۲) -۲
- (۳) -۳
- (۴) -۴

۲۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 - 4x + 2}{4x^2 + bx + 1}$ به صورت زیر است. مقدار $a + b + c + d$ کدام است؟

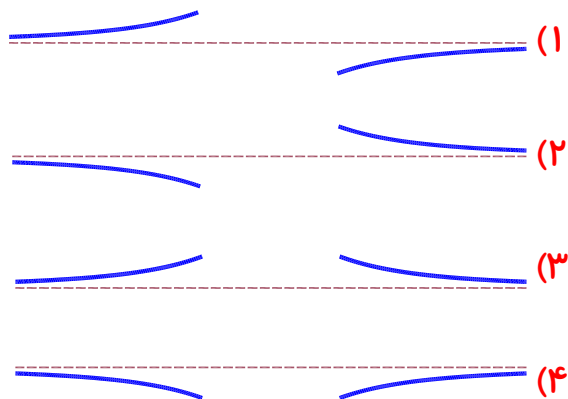


- (۱) ۱
- (۲) -۱
- (۳) ۲
- (۴) ۷

۳۰- نمودار تابع $y = \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x}$ نسبت به مجانب افقی خود، در بی‌نهایت کدام وضع را

(سراسری ریاضی خارج ۹۱)

دارد؟





۳۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c}$ دارای خط‌های جانب $y = -1$ ، $x = -2$ و $x = 1$ است.

(سراسری ریاضی ۹۹)

$f(-1)$ کدام است؟

(۴) $-1/5$

(۳) $1/75$

(۲) $1/5$

(۱) $1/25$

ویژه رشته ریاضی

۳۲- نقاط تقاطع خطوط جانب تابع $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 - 2x}}{x^2 - 4x + 3}$ همراه با مبدأ مختصات رئوس

مثلثی هستند. مساحت این مثلث چقدر است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

ویژه رشته ریاضی

پیوستگی

پیوستگی در نقطه

(۱) تابع f در نقطه‌ی a پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

(۲) پیوستگی راست و چپ نیز به همین صورت تعریف می‌شوند.

پیوستگی در بازه:

(۱) تابع f در بازه‌ی (a, b) پیوسته است هرگاه در تمامی نقاط بازه پیوسته باشد.

(۲) تابع f در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته است هرگاه در تمامی نقاط بازه‌ی (a, b) پیوسته

باشد و در نقطه‌ی a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد.

توضیح: پیوستگی در بازه‌های $[a, b)$ و $(a, b]$ به طور مشابه تعریف می‌شود.

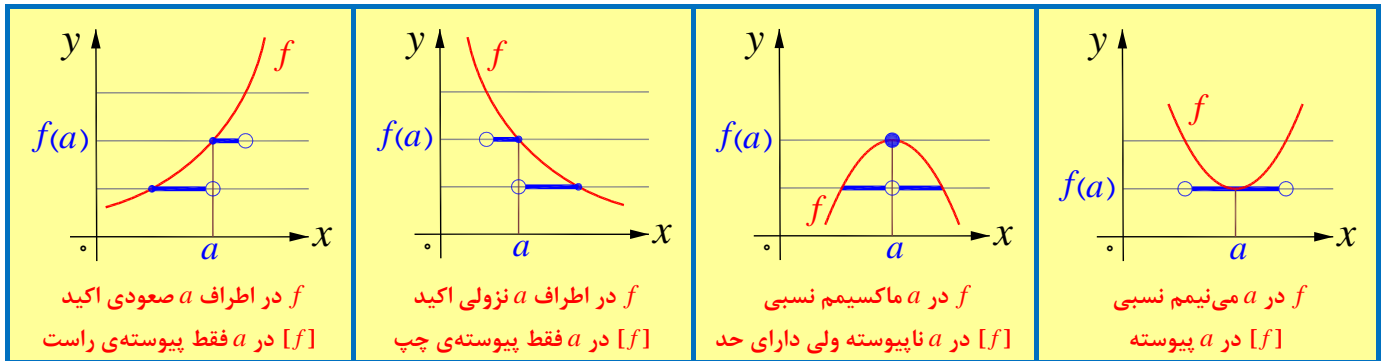
بررسی پیوستگی تابع جزء صحیح

(۱) برای بررسی پیوستگی تابع $[f]$ در نقطه‌ی a به فرض اینکه خود f پیوسته است:

(الف) اگر $f(a)$ عدد غیر صحیح باشد، $[f]$ در a پیوسته است.



(ب) اگر $f(a)$ عدد صحیح باشد، حالت‌های زیر به وجود می‌آید :



(۲) عامل صفر کننده باعث پیوستگی می‌شود. مثلاً تابع $f(x) = [x]$ در $x = 1$

ناپیوسته ولی $g(x) = (x-1)[x]$ در $x = 1$ پیوسته است.

مثال : پیوستگی تابع $f(x) = (2x^2 - x - 1)[2|x| + 1]$ را در نقاطی به طول‌های $\frac{1}{3}$ ، $-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ ، 0 ، -1 بررسی کنید.

مثال : نقاط ناپیوسته‌ی تابع $f(x) = (x^2 - 8x + 12)\left[\frac{x}{3}\right]$ را در بازه‌ی $[0, 12]$ بیابید.

مثال : تابع $f(x) = (x^2 - 1)[x^2]$ در بازه‌ی $(-1, a)$ پیوسته است. بیشترین مقدار ممکن a را بیابید.

بررسی پیوستگی توابع بدون جزء صحیح

(۱) نقاط مرزی توابع چندضابطه‌ای را بررسی کنید.

(۲) نقاطی که در دامنه‌ی تابع نیستند، تابع در آنها ناپیوسته است.

(۳) نقاط انتهایی دامنه، یعنی نقاطی که تابع در یک طرف آن تعریف نشده و نقاطی

که تابع در هر دو طرف آن تعریف نشده، نقاط ناپیوسته هستند.

چند قضیه :

(۱) اگر f و g در a پیوسته باشند، تمام توابع $f \pm g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ نیز در a پیوسته‌اند.

(مخرج مخالف صفر)

(۲) اگر f در a پیوسته و g در a ناپیوسته باشد، توابع $f \pm g$ و $\frac{g}{f}$ در a ناپیوسته‌اند.



(۳) اگر f در a پیوسته و غیر صفر و g در a ناپیوسته باشد، توابع fg و $\frac{f}{g}$ در a

ناپیوسته‌اند.

۳۳- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & x > 2 \\ ax-1 & x \leq 2 \end{cases}$$

بر روی

(سراسری ریاضی ۹۸)

مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

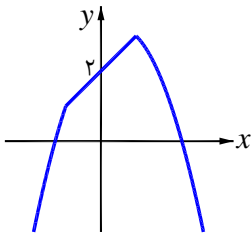
- (۱) $1/5$ (۲) 2 (۳) $2/5$ (۴) 3

۳۴- نمودار تابع

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & |x| \leq 1 \\ c+x-x^2 & |x| > 1 \end{cases}$$

در شکل روبه‌رو رسم شده است.

مقدار $f(2)$ کدام است؟



- (۱) 1 (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

۳۵- اگر

$$f(x) = \begin{cases} (x-c)[x] & |x-2| < 1 \\ ax+b & |x-2| \geq 1 \end{cases}$$

در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته باشد،

مقدار $f(7)$ کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 8

۳۶- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+a}}{x^2+ax+1}$ در \mathbb{R} پیوسته است. مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

- (۱) $-2 < a < 2$ (۲) $-2 < a \leq 1$ (۳) $1 \leq a < 2$ (۴) $a \leq 1$

۳۷- تابع $f(x) = [x^2 - 4x]$ در نقاط $x=1$ و $x=2$ به ترتیب ...

- (۱) پیوسته است، فقط پیوستگی چپ دارد.
 (۲) فقط پیوستگی راست دارد، فقط پیوستگی چپ دارد.
 (۳) پیوسته است، فقط پیوستگی راست دارد.
 (۴) فقط پیوستگی چپ دارد، فقط پیوستگی راست دارد.



۳۸- تابع $f(x) = (2x^2 + x - 1)[-x]$ در کدام بازه پیوسته است؟

- (۱) $(0, 2]$ (۲) $[0, 2)$ (۳) $[-2, 0)$ (۴) $[-2, 0]$

۳۹- تابع $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)[\sqrt{2x}]$ در بازه $[0, a)$ پیوسته است. بیشترین مقدار a

کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲ (۳) $4/5$ (۴) ۴

۴۰- تابع $f(x) = [\frac{2x}{3}]$ در بازه $[3, 12]$ دارای چند نقطه‌ی ناپیوستگی است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۴

آزمون :

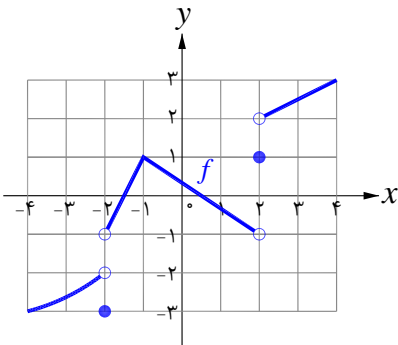
۴۱- اگر بازه $(a-1, 2a+1)$ یک همسایگی نقطه‌ی ۲ و زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی تعریف

تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{64 - x^2}$ باشد، محدوده‌ی تغییرات a کدام است؟

- (۱) $1 \leq a < 3$ (۲) $-\frac{1}{2} < a < \frac{7}{2}$ (۳) $2 \leq a < 3$ (۴) $\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$

۴۲- با توجه به شکل، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(3x - x^2) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(\frac{2}{x})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) صفر



۴۳- اگر تابع f در نقطه‌ی $x=1$ دارای حد باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 3x}{f(x) - 1} = 6$ باشد، حاصل

$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + \sqrt{f(x) + x})$ برابر کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴

(سراسری تجربی ۹۷)

۴۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1}$ ، کدام است؟

- (۱) -۱۱۲ (۲) -۹۶ (۳) -۸۴ (۴) -۷۲



۴۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2x+1}{x+\sqrt{x}-2} \right)$ برابر کدام است؟

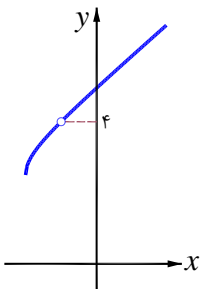
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $-\frac{1}{3}$

۴۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - x)(x^4 + 3x + 2)}{(x+1)^2 \sqrt{3x+7}}$ برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) -2

۴۷- شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + \sqrt{x+2}}$ است. مقدار b کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) 7
 ۵ (۴) ۶ (۳) ۷ (۲) ۸ (۱)



۴۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2[2x] + [-x] + 2}{\left|1 + \frac{1}{x}\right|}$ برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) -6
 -4 6 4

۴۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x+2| - |3x-2|}{\sqrt{2} - \sqrt{4-x^2}}$ برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) -8
 -4 8 4

۵۰- در مورد حد تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \left[\frac{4}{x}\right]$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام گزاره درست است؟

- ۱ (۱) حد راست دارد و برابر ۳ است. ۲ (۲) حد راست دارد و برابر ۴ است.
 ۳ (۳) حد چپ دارد و برابر ۳ است. ۴ (۴) حد چپ دارد و برابر ۴ است.

۵۱- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{[4-x]}{x-1} & x > 0 \\ x & \\ \frac{x}{|1-\sqrt{x+1}|} & x < 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(\sqrt{x}-x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(\sqrt{x}-x)$

برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) -5
 -1 5



۵۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x \sin 4x}{1 + \cos x}$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۸ (۳) ۸ (۴) ۴

۵۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{4}{1 - \cos 2x} \right)$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۵۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + 3 \sin x - 2}{\cos^2 x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۵۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos \sqrt{x}}}{\sqrt{1-x} - 1}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

ویژه رشته ریاضی

۵۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x - \sin 3x}{\sqrt{2+2\cos x}}$ ، کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

ویژه رشته ریاضی

۵۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) صفر

ویژه رشته ریاضی

۵۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left[\frac{2 \sin x}{x} \right] + 2 \left[\frac{\tan x}{x} \right] \right)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

ویژه رشته ریاضی

(سراسری ریاضی فارغ ۹۷)

(سراسری ریاضی فارغ ۹۱)



۵۹- کدام یک از حدهای زیر درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^3 - 3x + 2} = +\infty \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1 + \sqrt{x^2 - x}}{1-x} = +\infty \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + \cos x - 2}{\sin^2 x} = -\infty \quad (۴)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-4}{x^2 - 5x + 6} = -\infty \quad (۳)$$

۶۰- اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x-a}{bx - 2x^2 + c} = -\infty$ باشد، کدام درست است؟

$$a > 2, b = 2 \quad (۲) \quad a < 2, b = 2 \quad (۱)$$

$$a > 2, b = -2 \quad (۴) \quad a < 2, b = -2 \quad (۳)$$

۶۱- مجموع مقادیر صحیح a که $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{a + 2[x]}{|x| - 2} = -\infty$ باشد، کدام است؟

$$۱۹ \quad (۴)$$

$$۱۷ \quad (۳)$$

$$۱۵ \quad (۲)$$

$$۱۳ \quad (۱)$$

۶۲- اگر $f(x) = \frac{2ax+1-2\sqrt{x^2+2}}{ax-1}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ باشد، حد تابع f در نقطه‌ای که در دامنه‌ی تعریف تابع نیست برابر چقدر است؟

$$\frac{11}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۱)$$

۶۳- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(2x+1) - 2f(x)$ کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

۶۴- فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ ، حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$ ، کدام است؟

(سراسری ریاضی فارغ ۹۹)

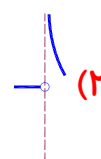
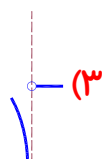
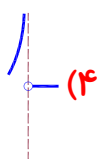
$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$+\infty \quad (۱)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۴)$$

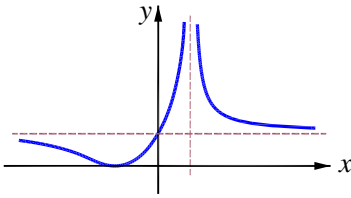
$$۰ \quad (۳)$$

۶۵- نمودار تابع $f(x) = \frac{1+[-x]}{x-x^2}$ در همسایگی $x=1$ به کدام صورت است؟



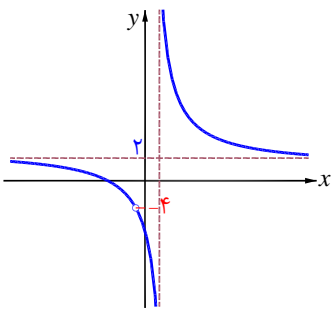


۶۶- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x^2 + 8x + a}{x^2 - bx + c}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار $f(3)$ کدام است؟



- (۱) ۲۴
(۲) ۳۲
(۳) ۴۸
(۴) ۵۰

۶۷- اگر f یک تابع درجه دوم و نمودار تابع $y = \frac{f(x)}{2x^2 - x - 1}$ به صورت زیر باشد، عرض رأس f کدام است؟



- (۱) -۶
(۲) -۷
(۳) -۸
(۴) -۹

۶۸- مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} - \frac{x^3}{x^2 - x}$ در دو نقطه‌ی A و B متقاطع‌اند. اگر O مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث OAB چقدر است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۱/۵
(۴) ۲/۵

ویژه رشته ریاضی

۶۹- نمودار تابع $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 6x + m}$ فقط دو خط مجانب دارد. مجموع مقادیر m کدام است؟

- (۱) -۱۱
(۲) -۷
(۳) -۲
(۴) ۱۴

ویژه رشته ریاضی

۷۰- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ پیوسته است؟

(سراسری تهری کشور ۹۹)

- (۱) ۱/۵
(۲) ۱
(۳) -۱
(۴) -۱/۵



۷۱- اگر $f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 2 \\ \frac{ax^2+x-10}{\sqrt{x+2}-2} & x > 2 \end{cases}$ در $x=2$ پیوسته باشد، عرض نقطه‌ی تلاقی

نمودار تابع f با خط $x=-1$ کدام است؟

- ۲۲ (۱) ۲۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۰ (۴)

۷۲- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & |x-1| < 1 \\ x^2+ax+b & |x-1| \geq 1 \end{cases}$ یک تابع همواره پیوسته باشد، مقدار a

(سراسری ریاضی ۹۹)

کدام است؟

- $-\frac{3}{2}$ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴)

۷۳- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & x \in \mathbb{Z} \\ x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ چند نقطه‌ی ناپیوسته در بازه‌ی $(-3, 4)$ دارد؟

- ۶ (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۷۴- اگر $f(x) = (x^2 - 7x + 12) \lfloor \sqrt{x+1} \rfloor$ بر بازه‌ی $[0, k)$ پیوسته باشد، بیشترین مقدار k

کدام است؟

- ۱۵ (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴)

۷۵- تعداد نقاط ناپیوسته‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x - \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]$ ، در بازه‌ی

(سراسری ریاضی خارج ۹۷)

$[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}]$ ، کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)