

کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل دوازدهم : مشتق

مهر داد عباسپور

تعریف مشتق

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

حدهای راست و چپ در روابط بالا، مشتق‌های راست و چپ هستند که با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نشان می‌دهیم.

مثال : با فرض $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f^2(x) - \Delta f(x)}{x^2 - 16}$ را بیابید.

$$\text{روش اول} / \lim_{x \rightarrow \varepsilon} \frac{f(x)}{x + \varepsilon} = \frac{f(x) - \Delta}{x - \varepsilon} f(\varepsilon)$$

$$= \frac{f(\varepsilon)}{\lambda} \cdot f'(\varepsilon) = \frac{\Delta \times \varepsilon / \Delta}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$f(\varepsilon) = \Delta$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$\text{روش دوم} / \text{Hop} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \varepsilon} \frac{f^2(x) f'(x) - \Delta f'(\varepsilon)}{x^2} = \frac{f(\varepsilon) f'(\varepsilon) - \Delta f'(\varepsilon)}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

مثال : اگر f تابع پیوسته و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - 6}{h} = 12$ باشد، مقادیر $f(2)$ و $f'(2)$ را بیابید.

$$\frac{f(2) - 6}{0} = 12 \Rightarrow f(2) - 6 = 0 \Rightarrow f(2) = 6$$

روش اول / $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h} \times 3 = 12 \rightarrow f'(2) \times 3 = 12 \rightarrow f'(2) = 4$

روش دوم / Hop $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f'(2+3h)}{1} = 12 \rightarrow 3f'(2) = 12 \rightarrow f'(2) = 4$

فرمول‌های مشتق

$$\left(\frac{2x^2 + 3}{2x^2 + 10} \right)' = \frac{20 - 14}{(2x^2 + 10)^2} \times 2x$$

فرض کنید c عدد حقیقی دلخواه و n یک عدد گویا باشد، در این صورت :

$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$(u^n)' = n u' u^{n-1}$	$\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)' = \frac{(ad-bc)u'}{(cu+d)^2}$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sqrt[3]{u})' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$	$(\sin u)' = u' \cos u$ *
$(\cos u)' = -u' \sin u$ *	$(\tan u)' = u' (1 + \tan^2 u)$ *	$(\cot u)' = -u' (1 + \cot^2 u)$ *

تذکره، *

تذکره : تعمیم یافته‌ی دو رابطه‌ی اول به صورت $(u + v + w)' = u' + v' + w'$ و

$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$ است.

مشتق تابع مرکب

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

$$(f(x^2))' = 2x \cdot f'(x^2)$$

$$(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

$$f'(x) \cdot h'(f(x)) = (h(f(x)))'$$

مثال: اگر $g(4) = 1$ ، $g'(4) = 3$ و $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 6}$ باشد، مشتق $f \circ g$ را در نقطه‌ی ۴ بیابید.

$$(f \circ g)'(4) = \underbrace{g'(4)} \cdot \underbrace{f'(g(4))}$$
$$= 3 f'(1)$$

$$= 3x \frac{\epsilon}{3x\epsilon} = 1$$

$$f'(x) = \frac{\epsilon x}{\sqrt[3]{(2x^2 + 6)^2}}$$

مثال : اگر $g(1) = 2$ ، $g'(1) = 3$ و $f(x + \sqrt{x}) = xg\left(\frac{x}{x}\right)$ باشد، $f'(1)$ را بیابید.

$$f(x + \sqrt{x}) = x \cdot g\left(\frac{x}{x}\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) f'(x + \sqrt{x}) = 1 \cdot g\left(\frac{x}{x}\right) + x \cdot \frac{-x}{x^2} g'\left(\frac{x}{x}\right)$$

$$\xrightarrow{x=1} \left(1 + \frac{1}{2}\right) f'(2) = g(1) - g'(1)$$

$$\frac{3}{2} f'(1) = 2 - 3 \rightarrow \underline{f'(1) = -\frac{2}{3}}$$

مشتق عامل صفر کننده

$$۱) (0 \cdot \square)' = 0' \cdot \square$$

$$۲) (0 \cdot \square)' = 0' \cdot \lim \square$$

نابینا

$$۳) (0 \cdot 0)' = 0$$

$$۴) \begin{cases} (0^r \cdot \square)' = 0 \\ (0^r \cdot \square)'' = (0^r)'' \cdot \square \end{cases}$$

$$f(x) = \underbrace{(x^2 - 3x + 2)}_0 \sqrt{x^2 + 5} \Rightarrow \underbrace{f'(2)} = (2x - 3) \sqrt{x^2 + 5} = 1 \cdot 2^2 = 3$$

$$f(x) = \underbrace{(x^2 + 1)}_0 [2x] \Rightarrow \underbrace{f'(-1)} = 2x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow -1} [2x] = 2 \begin{cases} -2 \\ -2 \end{cases} \begin{cases} f'_+(-1) = -4 \\ f'_-(-1) = -4 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\overbrace{(x-1)}^0 \overbrace{(x^2-1)}^0}{x+2} \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$f(x) = \underbrace{(x-1)^2}_0 (x^2 + 4) \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(1) = ((x-1)^2)'' \cdot (x^2 + 4) = (2)(4) = 8 \end{cases}$$

(سراسری تجربی خارج ۹۱)

۱- مشتق تابع $f(x) = x^2 \sqrt{\frac{3x+1}{x+2}}$ در نقطه‌ی $x = -3$ کدام است؟

$$\frac{2}{2} \text{ (۴)}$$

$$\frac{4}{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{2}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{2} \text{ (۱)}$$

$$f'(x) = 1 \cdot \frac{2 \sqrt{\frac{3x+1}{x+2}}}{x+2} + x \cdot \frac{\frac{2}{(x+2)^2}}{2 \sqrt{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}}$$
$$f'(-3) = 2 + (-3) \frac{2}{3 \times 2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

(سراسری تفریحی فارغ ۹۳)

۲- مشتق $y = \sin^3 \sqrt{2x}$ به ازای $x = \frac{\pi^2}{18}$ کدام است؟

$$\frac{27}{4\pi} \quad (۴)$$

$$\frac{27}{8\pi} \quad (۳)$$

$$\frac{9}{4\pi} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{8\pi} \quad (۱)$$

۳- اگر $f(x) = 2x\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) + 2f(x) - 15}{2x - 6}$ کدام است؟

۴ (۴)

۴/۲۵ (۳)

۸ (۲)

۸/۵ (۱) ✓

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x) + \Delta}{2}$$

$$= f'(2) \frac{f(2) + \Delta}{2} = \varepsilon f'(2) = \varepsilon \times \frac{16}{2} = \frac{16}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)f'(x) + 2f'(x)}{2}$$

$$f'(2)(f(2) + 1) = \frac{16}{2} \times (2 + 1) = \frac{16}{2}$$

$$f(2) = 4\sqrt{\frac{1}{3}} = 3$$

$$f'(x) = 2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} + 2x \cdot \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{\sqrt{x-2}}}$$

$$f'(2) = 1 + \frac{9}{16}$$

$$= 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

(سراسری ۱۳)

۱۴- مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام است؟

$$\frac{5}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{40} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۱)$$

$$f'(1) = 1 \times \frac{1}{16}$$

ساده کردن قبل یا بعد از مشتق گرفتن

۵- مشتق تابع $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-4}}$ در نقطه‌ای به طول ۵ برابر کدام است؟

$$-\frac{1}{6} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{(x+3)(\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-4})}{(\sqrt{2x-1})^2 - (\sqrt{x-4})^2} = \frac{(x+3)(\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-4})}{(2x-1) - (x-4)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{x+3}$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-4}} \rightarrow f'(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۶- مشتق دوم تابع $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ در $x = \frac{1}{8}$ چند برابر 2^{12} است؟

$$\frac{10}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{14}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{9} \quad (۱) \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{x^{3/2}} = x^{-3/2}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2} x^{-5/2} \rightarrow f''(x) = \frac{15}{4} x^{-7/2}$$

$$x = 2^{-3} \rightarrow f''(2^{-3}) = \frac{15}{4} \times (2^{-3})^{-7/2} = \frac{15 \times 2^7}{4} \times 2^{10} \\ = \frac{15}{4} \times 2^{17}$$

عبارتهایی که مشتق‌های شناخته شده هستند.

$$\underline{(fg)'(r)}$$

۷- اگر $f(x) = (x + \sqrt{x^2 - 3})^4$ و $g(x) = (x - \sqrt{x^2 - 3})^3$ باشد، حاصل $f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$

برابر کدام است؟

۱۶۲ (۴)

۸۱ (۳) ✓

۵۴ (۲)

۲۷ (۱)

$$(fg)(x) = (x + \sqrt{x^2 - 3}) \underbrace{(x + \sqrt{x^2 - 3})^3 \cdot (x - \sqrt{x^2 - 3})^3}_{(x^2 - (x^2 - 3))^3 = 3^3}$$

$$(fg)'(x) = 3 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} \right) \rightarrow (fg)'(2) = 3 \left(1 + \frac{2}{1} \right) = 9$$

مشتق تابع مرکب

۸- اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(1)$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۸)

$$f'(2) = \frac{4}{3}$$

$$\begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{l} (2) \\ (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} (1) \\ (3) \end{array}$$

$$g(1) = 2$$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(1) = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow g'(1) \cdot f'(g(1))$$

$$\rightarrow g'(1) \cdot f'(2) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

۹- اگر $f(1) = 2$ ، $f(2) = 4$ ، $f'(1) = 3$ و مشتق $f \circ f$ در $x = 1$ برابر ۱۲ باشد، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

$$(f \circ f)'(1) = 12 \rightarrow f'(1) \cdot f'(f(1)) = 12$$

$\textcircled{4(4)} \qquad 3(3) \qquad 2(2) \qquad 6(1)$

$$\therefore f'(2) = 12 \rightarrow \underline{f'(1) = 4}$$

۱۰- اگر $g(2x) = x^2 f(3x)$ و $g(4) = 12$ و $g'(4) = 6$ باشد، مقدار $f'(6)$ برابر کدام است؟

۴ (✓) صفر

۳ (-۱)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$2g'(2x) = 2x f(3x) + 2^2 \cdot 3 f'(3x)$$

$$x=2 \rightarrow 2g'(4) = 4f(6) + 12f'(6)$$

$$2(4) = 4(3) + 12f'(6)$$

$$f'(6) = 0$$

$$g(4) = 4f(6)$$

$$f(6) = 3$$

۱۱- اگر $f(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۲)

$$(f(g(x)))'$$

$$\frac{3}{x^2} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\frac{x-3}{x^2} \quad (4)$$

$$\frac{3}{x} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3x} \quad (3)$$

$$f(g(x)) = \frac{x-1-2}{1+x-1} = \frac{x-3}{x} = 1 - \frac{3}{x}$$

$$y' = \frac{3}{x^2}$$

مفاهیم مشتق پذیری

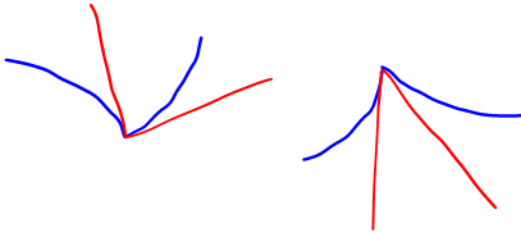
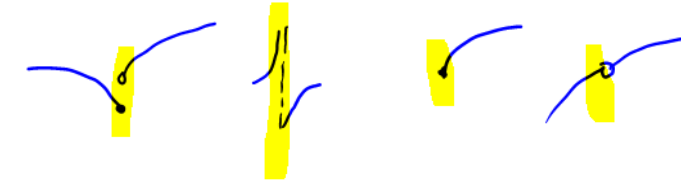
رابطه‌ی پیوستگی و مشتق پذیری :

پیوسته \Rightarrow مشتق پذیر

مشتق ناپذیر \Rightarrow ناپیوسته

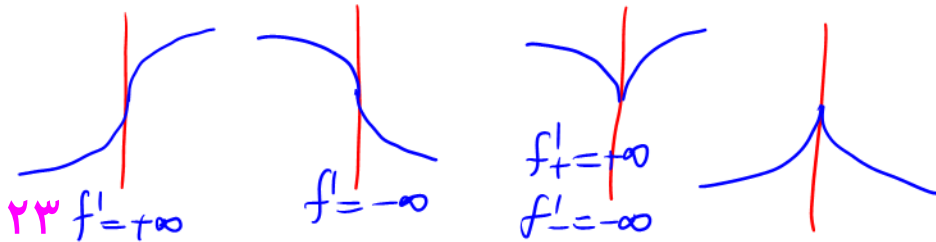
نقاط مشتق ناپذیر تابع :

(۱) نقاط ناپیوسته‌ی تابع



(۲) نقاط گوشه
 پیوسته / هموارها / یا گسسته / در این موارد وجود ندارند.

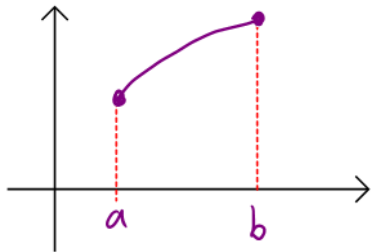
(۳) نقاطی که تابع مماس (یا نیم‌مماس) قائم دارد.



(پیوسته)

مشتق‌پذیری در بازه‌ی $[a,b]$:

درون بازه مشتق‌پذیر، در a مشتق راست و در b مشتق چپ موجود باشد.



مشتق پذیری توابع چندضابطه‌ای

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases} \quad x=1 \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{چپ} \\ \text{راست} \end{matrix} \Rightarrow \text{مشتق پذیر است}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases} \quad x=1 \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{چپ} \\ \text{راست} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(1) = 2x = 2 \\ f'_+(1) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{مشتق پذیر نیست}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2x-1 & x > 1 \end{cases} \quad x=1 \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{چپ} \\ \text{راست} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(1) = 2x = 2 \\ f'_+(1) = 2 \end{cases} \rightarrow f'(1) = 2$$

مثال : اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x < 4 \\ b\sqrt{x} & x \geq 4 \end{cases}$ در $x=4$ مشتق پذیر باشد، a و b را بیابید.

پس : $14 + \varepsilon a = 7b$

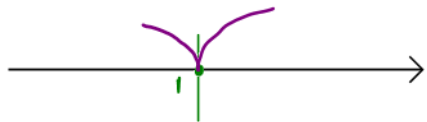
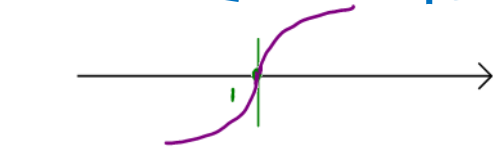
$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'_-(\varepsilon) = 2x + a = 1 + a \\ f'_+(\varepsilon) = \frac{b}{2\sqrt{x}} = \frac{b}{\varepsilon} \end{array} \right. \rightarrow 1 + a = \frac{b}{\varepsilon} \left. \vphantom{\begin{array}{l} f'_-(\varepsilon) = 2x + a = 1 + a \\ f'_+(\varepsilon) = \frac{b}{2\sqrt{x}} = \frac{b}{\varepsilon} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} a = -12 \\ b = -14 \end{array}$$

مشتق پذیری توابع رادیکالی

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{3}} \quad \left(\frac{1}{3} < 1 \right) \rightarrow f'(1) = \pm \infty$$

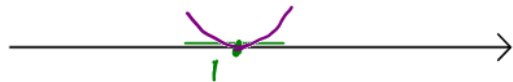
$$y' = \frac{1}{3} (x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} = (x-1)^{\frac{2}{3}} \quad \left(\frac{2}{3} < 1 \right) \rightarrow f'(1) = \pm \infty$$

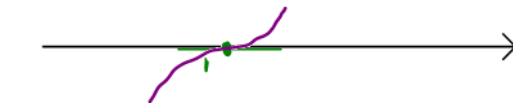


$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2} = (x-1)^{\frac{2}{2}} \quad \left(\frac{2}{2} > 1 \right) \rightarrow f'(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{2}{2} (x-1)^{\frac{2}{2}-1} = \frac{2}{2} \sqrt{x-1}$$



$$f(x) = \sqrt[5]{(x-1)^5} = (x-1)^{\frac{5}{5}} \quad \left(\frac{5}{5} > 1 \right) \rightarrow f'(1) = 0$$



مشتق پذیری توابع قدر مطلق

$$f(x) = x^r |x-2| : x=2 \quad \begin{cases} f'_+(2) = (x^r(x-2))' = 1 \times x^r = 2 \\ f'_-(2) = (x^r(2-x))' = -1 \times x^r = -2 \end{cases}$$

مشتق پذیر نیست

$$f(x) = (x-1)|x-1| : x=1 \quad f(x) = \pm(x-1)^2 \rightarrow f'(1) = 0$$

$$\rightarrow (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2}-1} : x=0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}} \rightarrow f'(0) = \frac{0}{0}$$

۲۸

$$\frac{\cdot \sqrt{\sqrt{x^2+1}+1}}{\parallel} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{\sqrt{x^2+1}+1}}$$

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{\sqrt{x^2+1}+1}} \quad f'(0) = (|x|)' \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x^2+1}+1}}$$

$$f'(0) = \pm 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow f'_+(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, f'_-(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

مشتق پذیری توابع براکت اول کنترل نیوتنی

$$f(x) = x[3x] : x=1$$

سه تا نذر → تا نیوتنه

$$f(x) = (x-1)[3x] : x=1$$

کامل منفی

$$\begin{aligned} \text{نیوتنه} \rightarrow f'_+(1) &= (3(x-1))' = 3 \\ f'_-(1) &= (2(x-1))' = 2 \end{aligned}$$

سه تا نذر (مردم)

$$f(x) = (x-1)^2[3x] : x=1$$

کامل منفی

$$\begin{aligned} \text{نیوتنه} \rightarrow f(x) &= (x-1)^2 x (2 \leq 3) \\ f'(1) &= 0 \end{aligned}$$

سه تا نذر

زاویه‌ی نقطه‌ی گوشه

(۱) با محاسبه‌ی مشتق راست و چپ در نقطه‌ی گوشه، شیب نیم‌مماس‌های راست و چپ به

دست می‌آید و با داشتن شیب دو خط، زاویه‌ی بین آنها را به دست می‌آوریم.

$$f'_+ = \tan \alpha$$

$$f'_- = \tan \beta \quad \theta = |\alpha - \beta|$$

(۲) اگر نیم‌مماس‌ها را نیم‌خط در نظر بگیریم برای اینکه بفهمیم زاویه‌ی بین آنها حاده است یا

منفرجه، با فرض اینکه مشتق‌های راست و چپ m_1 و m_2 باشند:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \text{زاویه قائمه}$$

$$m_1 \cdot m_2 > -1 \Rightarrow \text{زاویه منفرجه}$$

$$m_1 \cdot m_2 < -1 \Rightarrow \text{زاویه حاده}$$

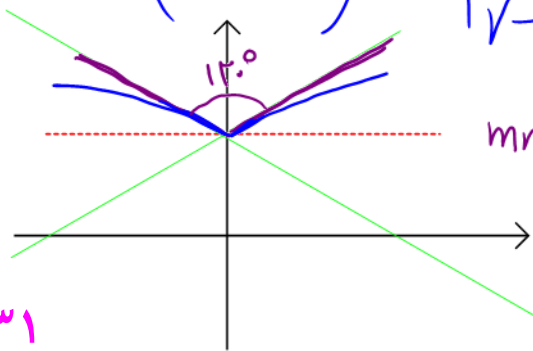
مثال : زاویه‌ی بین مماس‌های راست و چپ تابع $f(x) = \sqrt{|2x|+3}$ را در نقطه‌ی گوشه بیابید.

$$x=0$$

$$f'_+(0) = (\sqrt{2x+3})' = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ \rightarrow 30^\circ - (-30^\circ) = 60^\circ$$

$$f'_-(0) = (\sqrt{-2x+3})' = \frac{-1}{\sqrt{-2x+3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \tan(-30^\circ)$$

$$mm' = -\frac{1}{3} > -1 \rightarrow \theta > 90^\circ \rightarrow \theta = 120^\circ$$



مثال : زاویه‌ی بین مماس‌های راست و چپ تابع $f(x) = |x - 3|$ را در نقطه‌ی گوشه بیابید.

۱۲- اگر $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 2}$ باشد، $f'_+(2)$ برابر کدام است؟

$-\infty$ (۴)

$+\infty$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$-\frac{1}{3}$ (۱)

$$f'(x) = \frac{2x-1}{3\sqrt{(x^2-x-2)^2}}$$

$$f'_+(1) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

۱۳- اگر $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{6x - 9}}$ باشد $f'_{-}(3)$ کدام است ؟

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \text{ (۴)}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{6}} \text{ (۳)}$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}} \text{ (۲)}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{6}} \text{ (۱)}$$

$$\sqrt{x + \sqrt{4x - 9}} \text{ (X)} \rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - (4x - 9)}}{\sqrt{x + \sqrt{4x - 9}}} = \sqrt{(x - 2)^2}$$

$$f(x) = \frac{|x - 2|}{\sqrt{x + \sqrt{4x - 9}}} \quad f'_{-}(3) = (3 - 2)' \cdot \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{4x - 9}}}$$
$$= (-1) \times \frac{1}{\sqrt{9}} = -\frac{1}{\sqrt{9}}$$

۱۴- وضعیت مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x} & x \leq 1 \\ x^2 + 3 & 1 < x \leq 2 \\ x^3 - 8x & x > 2 \end{cases}$ در نقاط $x=1$ و $x=2$ به ترتیب

چگونه است؟

$x=1 \begin{cases} \epsilon \\ \epsilon \end{cases} \quad f'_{-}(1) = \frac{\epsilon}{\sqrt{8x}} = 2 \rightarrow f'_{+}(1) = 2$
 $f'_{+}(1) = 2x = 2$

$x=2 \begin{cases} \epsilon \\ -\epsilon \end{cases} \quad \text{مشتق پذیر} \rightarrow \text{مشتق پذیر}$

(۱) مشتق پذیر، مشتق پذیر

(۲) مشتق پذیر، مشتق ناپذیر ✓

(۳) مشتق ناپذیر، مشتق پذیر

(۴) مشتق ناپذیر، مشتق ناپذیر

۱۵- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ ، مشتق پذیر است. مقدار c کدام

است؟

(سراسری تیرگی ۹۹)

$$\frac{2}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۳)}$$

$$-\frac{1}{3} \text{ (۲)}$$

$$-\frac{2}{3} \text{ (۱)}$$

$$\text{پس } ۳ = -2 - 2b + c \rightarrow \underline{-2b + c = 5}$$

$$\begin{cases} f'(-2) = \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{9}} = -\frac{1}{3} \\ f'(-2) = -x + b = 2 + b \end{cases} \rightarrow \underline{b + 2 = -\frac{1}{3}}$$

$$\rightarrow b = -\frac{7}{3}, c = \frac{1}{3}$$

۱۶- اگر $f(x) = \frac{x^2}{|1-x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی فارج ۹۷)

$$\frac{9}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{9}{2} \quad (۳)$$

$$f'(3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۱)$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

۱۷- اگر $f(x) = 2x + |x|$ و $g(x) = x - 2|x|$ باشد، مجموع مشتق‌های راست و چپ تابع $f \circ g$ در

نقطه‌ی $x = 0$ برابر کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$x \rightarrow 0^+ : f(g(x)) = f(-x) = -2x + |-x| = -2x + x = -x$$

$$(f \circ g)'_{(0^+)} = -1$$

$$x \rightarrow 0^- : f(g(x)) = f(3x) = 9x + |3x| = 9x + 3x = 12x$$

$$(f \circ g)'_{(0^-)} = 12$$

۱۸- مشتق راست تابع $f(x) = (x-1)|x^2 - 3x + 2|$ در نقطه‌ی گوشه برابر کدام است؟

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$f(x) = (x-1)|(x-1)(x-2)|$$

نقطه گوشه $x=1$ \rightarrow $x=2$ \leftarrow

$$f'_{+}(1) = \left(\underbrace{(x-2)}_0 (x-1)^2 \right)' = (1) \times (1-1)^2 = 1$$

۱۹- برای تابع $f(x) = (x^2 - a)[2x]$ ، مجموع مقادیر مشتق راست و چپ در نقطه‌ی $x = 2$ برابر b است. مقدار $a + b$ چقدر است ؟

۳۶ (۴)

۳۴ (۳)

۳۲ (۲)

۳۰ (۱)

$[2x]$ در $x=2$ حور است و مشتق دارد و برابر می‌شود $\frac{1}{2}$ در $x=2$ حور است
 $x^2 - a = 0 \rightarrow x=2 \rightarrow a=4$

$$f(x) = (x^2 - 4)[2x]$$

$$f'_+(2) = (2(x^2 - 4))' = 4x = 8 \rightarrow b = 21$$

$$f'_-(2) = (2(x^2 - 4))' = 4x = 8$$

۴۰

مماس بر منحنی در نقطه‌ای واقع بر آن

- (۱) مشتق تابع در یک نقطه شیب خط مماس بر تابع در آن نقطه است.
- (۲) هرگاه تابع پیوسته و مشتق بی‌نهایت شود، تابع مماس قائم (نیم‌مماس قائم) دارد.
- (۳) در توابع رادیکالی، ریشه‌ی زیر رادیکال (توان ریشه کمتر از یک) نقطه‌ای است که تابع مماس قائم (نیم‌مماس قائم) دارد.

نقطه واقع بر منحنی

مثال : معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = x^3 + x$ را در نقطه‌ی $x = 1$ واقع بر آن را بیابید.

$$x = 1 \xrightarrow{y} y = 2 \rightarrow A(1, 2)$$

$$y' = 3x^2 + 1 = 4$$

$$y - 2 = 4(x - 1) \rightarrow \underline{y = 4x - 2}$$

نقطه غیر واقع بر منحنی



مثال: معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = x^2$ که از نقطه‌ی $A(-1, -3)$ بگذرد را بیابید.

$$B(\alpha, \alpha^2) \rightarrow y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha) \xrightarrow{A(-1, -3)}$$

$$m = y' = 2\alpha$$

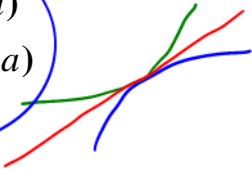
$$-3 - \alpha^2 = 2\alpha(-1 - \alpha) \rightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 1 \rightarrow B(1, 1), m = 2 \rightarrow y = 2x - 1 \\ \alpha = -3 \rightarrow B(-3, 9), m = -6 \rightarrow y = -6x - 9 \end{array} \right\}$$

منحنی‌های مماس بر هم

(روش ۱) شرط اینکه نمودار توابع f و g در نقطه‌ی $x = a$ بر هم مماس باشند:

$$\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases}$$



(روش ۲) شرط اینکه نمودار توابع f و g در نقطه‌ی $x = a$ بر هم مماس باشند:

معادله‌ی $f(x) = g(x)$ ریشه‌ی مضاعف $x = a$ داشته باشد.

مثال : خط $y = ax + 1$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی $y = x^3 + bx^2 + 5$ مماس است. a و b را

بیابید.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \text{ / } \left\{ \begin{array}{l} x^3 + bx^2 + 5 = ax + 1 \\ 3x^2 + 2bx = a \end{array} \right. \xrightarrow{x=1} \left\{ \begin{array}{l} b+4 = a+1 \\ 2b+3 = a \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b=2 \\ a=7 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2} \text{ / } x^3 + bx^2 + 5 = ax + 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{نقطه} \\ x=1 \end{array} \right)$$

مثال : خط $y = ax + 2$ بر منحنی $y = x^2 + x + 7$ مماس است. a را بیابید.

$$\text{نقش ۱} / \begin{cases} x^2 + x + 7 = ax + 2 \\ 2x + 1 = a \end{cases}$$

$$\text{نقش ۲} / x^2 + x + 7 = ax + 2 \quad (\text{نقش ۱})$$

$$\hookrightarrow x^2 + (1-a)x + 5 = 0 \rightarrow (x \pm r)^2 = 0$$

$$1-a = \pm 2r \rightarrow a = 1, -3$$

۲۰- خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطه‌ی $x=4$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام

(سراسری ریاضی ۹۹)

عرض قطع می‌کند؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۴ (۱)

$$x = \varepsilon \rightarrow y = \frac{14}{\sqrt{\varepsilon}} = 1 \quad A(\varepsilon, 1)$$

$$y' = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}(5x-4)}{x} = \frac{5(2) - \frac{1}{2}(16)}{\varepsilon} = \frac{3}{\varepsilon}$$

$$y - 1 = \frac{3}{\varepsilon}(x - \varepsilon) \quad y = \frac{3}{\varepsilon}x + 2 \quad \left| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow y=2 \end{array} \right.$$

۲۱- از نقطه‌ی $A(0, -2)$ دو خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = x^2 - 1$ رسم شده است. مساحت

(سراسری ریاضی خارج ۹۰)

مثلث با رأس‌های A و دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۲)

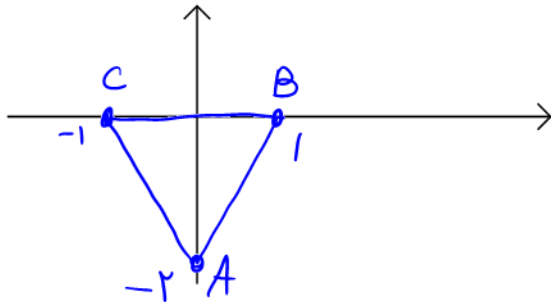
۲ (۱)

$$B(\alpha, \alpha^2 - 1)$$

$$m = 2\alpha$$

$$y - (\alpha^2 - 1) = 2\alpha(x - \alpha) \xrightarrow{(0, -2)}$$

$$-2 - \alpha^2 + 1 = 2\alpha(0 - \alpha) \rightarrow \alpha = \pm 1 \quad \begin{cases} B(1, 0) \\ C(-1, 0) \end{cases}$$



$$S = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

۲۲- خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$ ، در نقطه‌ی

(سراسری تیربی فارغ ۹۹)

$x=2$ ، مشترک‌اند. مقدار b ، کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

$$\left\{ \begin{array}{l} ax^2 + bx = \frac{x+2}{x-1} \\ 2ax + b = \frac{-3}{(x-1)^2} \end{array} \right.$$

$$x=2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 8a + 2b = 3 \\ 8a + b = -3 \end{array} \right. \\ \hline b = 7$$

۲۳- خط $y = mx + 1$ بر منحنی $y = \frac{mx}{x+2}$ مماس است. مقدار بزرگتر m کدام است؟

$$3 + 2\sqrt{2} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$1 + 2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$2 + \sqrt{3} \quad (2)$$

$$1 + \sqrt{3} \quad (1)$$

$$\frac{mx}{x+2} = mx + 1 \rightarrow mx = mx^2 + x + 2mx + 2$$

$$mx^2 + (m+1)x + 2 = 0$$

$$\Delta = (m+1)^2 - 4m = 0$$

$$m^2 - 4m + 1 = 0$$

$$m = 2 \pm \sqrt{3}$$

۲۴- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{4x-5}{x+1}$ و دامنه‌ی $[0, 8]$ ، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی

است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند، این خط مماس محور y ها را با کدام عرض قطع

می‌کند؟

(سراسری تیرگی خارج ۹۱)

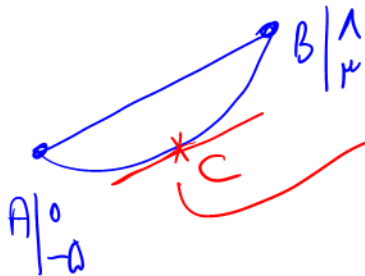
(۴) $-0/5$

(۳) -1

(۲) $-1/5$

(۱) -2

$$m_{AB} = \frac{1}{+1} = +1$$



$$y' = +1 \rightarrow \frac{4}{(x+1)^2} = 1 \rightarrow$$

$$(x+1)^2 = 4 \rightarrow x+1 = \pm 2 \rightarrow x = 1, -3$$

$$\xrightarrow{\text{دامنه}} x = 1 \rightarrow C(1, 1) \rightarrow y = x - 1 \xrightarrow{x=0} y = -1$$

۲۵- خطی به موازات نیمساز ربع اول و سوم، بر منحنی $y = 4\sqrt{x+6}$ مماس است. این خط محور x

ها را در نقطه‌های با کدام طول قطع می‌کند؟

-۱۳ (۴)

-۱۲ (۳)

-۱۱ (۲)

-۱۰ (۱)

$$y' = 1 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+6}} = 1 \rightarrow \sqrt{x+6} = 2 \rightarrow x = -2$$

$A(-2, 4)$

$$y - 4 = 1(x - (-2)) \quad y = x + 6$$

$$y = 0 \rightarrow x = -6$$

۲۶- خط گذرا بر دو نقطه $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ بر منحنی پیوسته $y = f(x)$ در نقطه $x = 3$

مماس است. حد عبارت $\frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x}$ وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟ (سراسری ریاضی فارج ۹۲)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$m = \frac{3-2}{-1-1} = -\frac{1}{2} \rightarrow y-2 = -\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$f(3) = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \quad f'(3) = -\frac{1}{2}$$

$$f(3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{x-3} \cdot \frac{f(x) + 5}{-1}$$

$$f'(3) \cdot \frac{f(3) + 5}{-1} = -\frac{1}{2} \times \frac{1+5}{-1} = 3$$

۵۳

آهنگ تغییر

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(a) = \text{آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x = a$$

تذکر: از فیزیک می‌دانیم که سرعت، آهنگ تغییر معادله‌ی مکان نسبت به زمان است.

۲۷- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ ، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = 2$ ، از آهنگ تغییر

(سراسری تیربی ۹۱)

متوسط در بازه‌ی $[1, 4]$ کدام است ؟

۰/۷۵ (۴)

۰/۴۵ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۲۵ (۱)

$$f'(2) = x + \frac{1}{x^2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{1}}{3} = \frac{1}{6}$$

۲۸- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = x + \sqrt{4x+1}$ در بازه $[2, 2+h]$ با آهنگ آنی تغییر

در $x=6$ برابر است. مقدار h کدام است؟

۶ (۴)

۸ (۳)

۹ (۲)

۱۰ (۱)

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(6)$$

$$\frac{2+h + \sqrt{9+4h} - 5}{h} = \frac{v}{\delta}$$

$$1 + \frac{\sqrt{9+4h} - 3}{h} = \frac{v}{\delta} \rightarrow \frac{\sqrt{9+4h} - 3}{h} = \frac{v}{\delta} = \frac{v}{\delta}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$$

$$f'(6) = 1 + \frac{2}{\sqrt{25}}$$

آزمون:

۲۹- اگر $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x-1}}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - f(x) - 2}{x-3}$ کدام است؟

$$f(3) = 2$$

$$-\frac{9}{8} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\frac{9}{8} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{8} \quad (2)$$

$$\frac{3}{8} \quad (1)$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(f(x)-2)(f(x)+1)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} (f(x)+1) = \underline{f'(3) \cdot (f(3)+1)}$$

$$= -\frac{3}{8} (2+1) = -\frac{9}{8}$$

$$\textcircled{2} \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x)f'(x) - f'(x)}{1} = 2f(3)f'(3) - f'(3) = \underline{f'(3)(2f(3)-1)}$$

$$= -\frac{9}{8}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{4}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+5}{x-1}}} \rightarrow f'(3) = \frac{-\frac{4}{\varepsilon}}{\varepsilon} = -\frac{4}{\varepsilon}$$

۵۷

۱۳- مشتق تابع $f(x) = \sin^2(2x) \cdot \tan(4x)$ در $x = \frac{\pi}{12}$ برابر چقدر است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲) ✓

۶ (۱)

$$f'(x) = \underbrace{(2 \sin(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2)}_{\sin 4x} \tan 4x + (1 + \tan^2(4x)) \cdot 2 \sin^2(2x)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \times 2 \times \tan \frac{\pi}{3} + 4(1 + \tan^2 \frac{\pi}{6}) \sin^2 \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times \sqrt{3} + 4(1 + 3) \left(\frac{1}{2}\right) = 3 + 8 = 11$$

۳۱- اگر $f(x) = \frac{x^2 - 4}{3^x + a}$ و $f'(2) = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱) ✓

$$f'(x) = (x^2 - 4)' \cdot \frac{1}{3^x + a} = 2x \cdot \frac{1}{3^x + a} = \frac{2}{9 + a} = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow 19 = 9 + a \rightarrow a = 10$$

۳۲- مشتق دوم تابع $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{1-x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{1}{2}$ برابر کدام است؟

۴ (۴)

۸ (۳)

۱۲ (۲)

۱۶ (۱) ✓

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{(2x-1)^2}_{\varepsilon x^2 - \varepsilon x + 1} \cdot \frac{1}{1-x} = 8 \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 16$$

$$\varepsilon x^2 - \varepsilon x + 1$$

$$8x - \varepsilon$$

$$8$$

۳۳- اگر $f(x) = \frac{1+2\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ باشد، حاصل $\frac{1}{f'(0,36)}$ کدام است؟

۵/۴ (۴)

۴/۸ (۳) ✓

۴/۲ (۲)

۳/۶ (۱)

$$(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2 = x + 1 - x + 2\sqrt{x(1-x)} = 1 + 2\sqrt{x-x^2}$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \rightarrow f'(0,36) = \frac{1}{2(0,4)} - \frac{1}{2(0,8)}$$

$$= \frac{10}{12} - \frac{10}{16} = \frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{5}{24} \rightarrow \frac{24}{5} = 4,8$$

۳۴- مشتق دوم $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ در $x = \frac{\pi}{24}$ برابر چقدر است؟

$-3\sqrt{3}$ (۴) ✓ $-6\sqrt{3}$ (۳) -3 (۲) -6 (۱)

$$f(x) = 1 - 4 \sin^2(2x) \cos^2(2x) = 1 - 4 \left(\frac{1}{4} \sin(4x) \right)^2 = 1 - \frac{1}{4} \sin^2(4x)$$

$$f'(x) = 0 - \frac{1}{4} \times \underbrace{2 \sin(4x) \cdot \cos(4x)}_{\sin 2(4x)} \cdot 4 = -\frac{1}{2} \sin(8x)$$

$$f''(x) = -4 \cos(8x)$$

$$f''\left(\frac{\pi}{24}\right) = -4 \cos \frac{\pi}{3} = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2$$

۳۵- اگر $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ و $g(x) = x\sqrt{x^2 - x - 2}$ باشد، حاصل $f'(-2)g(-2) + f(-2)g'(-2)$ برابر کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

-۵ (۲)

۵ (۱)

$$(f \cdot g)'(-2) = (-2x-1)_{x=-2}$$

$$= 3$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

$$g(x) = x\sqrt{(x-2)(x+1)}$$

$$(f \cdot g)(x) = x\sqrt{(x+1)^2}$$

$$= x|x+1|$$

$$-2 \text{ منفی } \rightarrow x(-x-1) = -x^2 - x$$

۱۳۶- خط به معادله‌ی $y = 3x - 5$ در نقطه‌ی $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است.

(سراسری ریاضی فارغ ۹۱)

۴ (۴)

اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(fog)'(2)$ کدام است؟

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\begin{cases} g(2) = 1 \\ g'(2) = 3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2}{3}$$

$f'(1) = \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} (fog)'(2) &= g'(2) \cdot f'(g(2)) \\ &= 3 f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4 \end{aligned}$$

۶۴

۳۷- اگر $f(x) = x + \sqrt{x+2}$ باشد، مشتق تابع $f \circ \sqrt{f}$ در $x=2$ برابر چقدر است؟

$$\frac{25}{64} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\frac{25}{16} \quad (3)$$

$$\frac{5}{16} \quad (2) \quad \hookrightarrow f(2) = 4 \quad \frac{5}{4} \quad (1)$$

$$f(\sqrt{f(x)}) \rightarrow y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(\sqrt{f(x)}) = \frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} \cdot f'(\sqrt{f(2)})$$

$$\frac{1}{2} f'(2) \cdot f'(2) = \frac{(f'(2))^2}{4} = \frac{25}{16}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \rightarrow f'(2) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

۳۸- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ ، $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ و $\frac{h(x)}{2x\sqrt{x}} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ باشد، $h(x)$ کدام

است؟

$$(f(g(x)))'$$

$$x-1 \text{ (۲)}$$

$$x+1 \text{ (۳)}$$

$$x-2 \text{ (۲)}$$

$$x+2 \text{ (۱)}$$

$$f(g(x)) = \sqrt{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 4} = \sqrt{x + \frac{1}{x} - 2 + 4} = \sqrt{x + \frac{1}{x} + 2}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = y$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

۳۹- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در \mathbb{R} مشتق پذیر از مرتبه‌ی دوم است. به ازای هر عدد حقیقی x

تابع $g(x) = f(4 - x^2)$ است. اگر $f'(1) = -5$ و $f''(1) = -1$ باشد، مقدار $g''(\sqrt{3})$ ، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۷)

-۲ (۲) ✓

-۳ (۱)

۳ (۴)

۲ (۳)

$$g'(x) = -2x f'(4 - x^2)$$

$$g''(x) = -2 f'(4 - x^2) + (-2x) \cdot (-2x f''(4 - x^2))$$

$$g''(\sqrt{3}) = -2 f'(1) + 12 f''(1) = -2(-5) + 12(-1) = -2$$

۱۴۰- خطوط $x=3$ و $y=b$ بر تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - ax + 15}$ مماس اند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

$x^2 - ax + 15 = 0 \xrightarrow{x=3} 9 - 3a + 15 = 0 \rightarrow a = 8$

در این نقطه مماس است

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8x + 15}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x - 8}{3} = 0 \rightarrow x = 4$$

$$f(3) = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\begin{cases} A(3, -1) \\ m=0 \end{cases} \rightarrow y = -1$$

$$b = -1$$

۴۱- مشتق چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ در نقطه‌ی $x = 0$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۱۹)

$$\frac{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{1 - (1 - x^2)}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{|x|}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}$$

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}$$

$$f'_{-}(0) = \left(\frac{|x|}{-x} \right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}$$

$$= (-1) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3) \quad \checkmark$$

۱۴۲- در تابع با ضابطه مقدار $f'(2) - f'(5)$ ، کدام است؟ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4}\right](x^2 - 9x) & 4 \leq x < 8 \end{cases}$

(سراسری ریاضی خارج ۹۹)

$$f'(2) = \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}} = \frac{10}{2\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

$$f'(5) = (1(x^2 - 9x))' = 2x - 9 = 1$$

$$\rightarrow \frac{5}{\sqrt{14}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

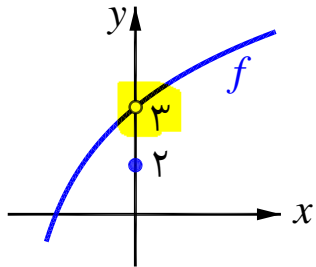
$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{2}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{2}{4} \quad (3)$$

۴۳- با توجه به نمودار تابع f در شکل روبه‌رو، اگر $g(x) = (2x - x^2)f(x)$ باشد، حاصل $g'(0)$ کدام است؟



$$g'(0) = (2 - 2x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ = 2 \times 3 = 6$$

۲ (۲)

۶ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2-x)f(x) - 0}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ = 2(3) = 6$$

۱۴۴- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - [x] + |x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ ، کدام است ؟

(سراسری ریاضی ۹۷)

$$f'(1) = \left(\sqrt{x^2 - 1 + x} \right)' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2-1+x}} = \frac{2}{2}$$

$$\frac{5}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{5}{2} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

$$\frac{2}{2} \text{ (۳)}$$

(سراسری ریاضی فارغ ۹۱)

۴۵- تابع $f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x}$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۴ (۴)

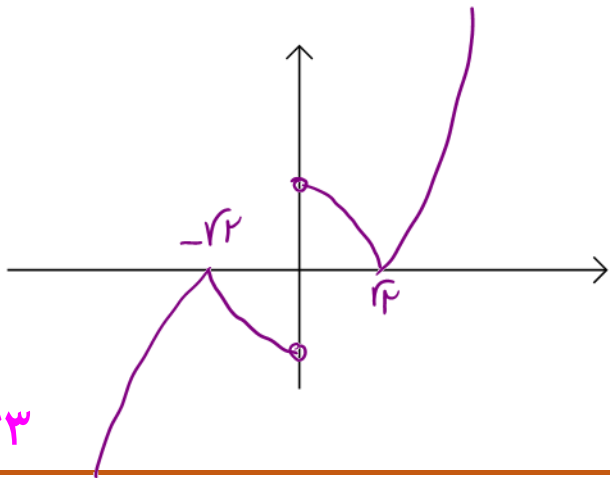
۳ (۳) ✓

۲ (۲)

۱ (۱)

$$f(x) = \frac{|x(x^2 - 2)|}{x} = \pm |x^2 - 2|$$

• $Df \ni \{x \mid x = \pm\sqrt{2}\}$



۷۳

۱۴۶- اگر $f(x) = (2x^2 + ax + b)[2x]$ در $x = 3$ مشتق پذیر باشد، مقدار $f'_+(-2)$ برابر کدام است؟

۱۲۰ (۴)

۸۰ (۳) ✓

۶۰ (۲)

۴۰ (۱)

← $[2x]$ در ۳ حد است $\frac{3}{3}$ صحت ندارد

$$2x^2 + ax + b = 2(x-3)^2$$

$$f(x) = 2(x-3)^2 [2x]$$

$$f'_+(-2) = \left(2(x-3)^2 x(-2) \right)' = -1 \times 2(x-3) = -1 \times 2(-5) = 10$$

۴۷- تابع $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{2x} & x \leq 2 \\ x^2 + a & x > 2 \end{cases}$ دارای نقطه‌ی گوشه‌ای است. عرض از مبدأ نیم مماس چپ در

این نقطه کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

بسته $x=2 \rightarrow 2a = \varepsilon + a \rightarrow a = \varepsilon$

$f(2) = \varepsilon\sqrt{2x} = 1$

$f'_{-}(2) = (\varepsilon\sqrt{2x})' = \frac{\varepsilon \times 2}{2\sqrt{2x}} = 2$

$A(2, 1)$

$y - 1 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 3$

۴۸- خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^3 + \frac{a}{x}$ در $x=1$ ، از مبدأ مختصات عبور می کند. مقدار a

کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) ✓

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 + a \quad A(1, 1+a) \\ f'(x) = 3x^2 - \frac{a}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 3 - a \end{array} \right\} y - (1+a) = (3-a)(x-1)$$

$$\xrightarrow{(0,0)} \quad 0 - a - 1 = (3-a)(1-1) \rightarrow -a - 1 = a - 3$$

$$\rightarrow \underline{a = 1}$$

۱۴۹- خطی که بر تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ مماس است و از نقطه‌ی $A(1, 5)$ می‌گذرد، محور y ها را در نقطه‌ای

با کدام عرض قطع می‌کند؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

$$B \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \alpha+1 \\ \alpha-1 \end{array} \right.$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f'(\alpha) = \frac{-2}{(\alpha-1)^2}$$

$$y - \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} (x - \alpha)$$

$$A(1, 0) \rightarrow$$

$$0 - \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} \alpha (1 - \alpha)$$

$$\rightarrow \frac{3\alpha - 4}{\alpha - 1} = \frac{2}{\alpha - 1} \quad \alpha = 2$$

۷۷ B/۳

$$m = -2$$

$$y - 3 = -2(x - 2) \rightarrow y = -2x + 7$$

۵۰- خط $y = mx + 1$ بر منحنی $y = x^3 + m$ در نقطه‌ای واقع در ربع اول دستگاه مختصات مماس

است و در نقطه‌ی دیگر A نیز این منحنی را قطع می‌کند. عرض نقطه‌ی A کدام است؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

-۵ (۲) ✓

-۶ (۱)

$$\begin{cases} x^3 + m = mx + 1 \\ mx = m \end{cases} \rightarrow x^3 + mx^2 = mx^2 + 1 \rightarrow (x^3 - 1) = 0$$

و $x = 1 \rightarrow m = 3$

$$x^3 + 3 = 3x + 1 \rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$(x-1)^2(x+2) = 0 \rightarrow x = 1, -2 \rightarrow f(-2) = -1 + 3 = -2$$

۵- به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله $y = 5x + a$ ، بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ ، مماس است؟

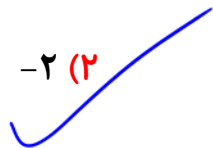
(سراسری تیرین فارغ ۹۷)

۳ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)



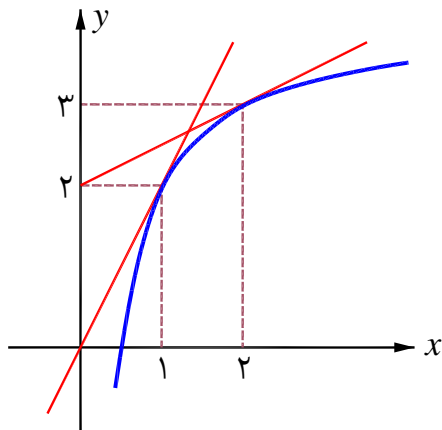
$$2x^2 - 3x + 6 = dx + a \quad \text{در نقطه}$$

$$x^2 - 3x + \frac{6-a}{2} = 0 \rightarrow \frac{6-a}{2} = 3 \rightarrow a = -6$$

$$(x-3)^2$$

۵۲- در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ و دو تا از خطوط مماس بر آن رسم شده‌اند.

مشتق $f(xf(x))$ به ازای $x=1$ چقدر است؟



2 (2) ✓ 1 (1)
 $2/5$ (4) $1/5$ (3)

$$(1 f(x) + x \cdot f'(x)) f'(x f(x))$$

$$\left(\underbrace{f(1)}_2 + \underbrace{f'(1)}_2 \right) \underbrace{f'(f(1))}_2$$

$$= \varepsilon f'(1) = \varepsilon \left(\frac{2}{1} \right) = 2$$

۵۳- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$ ، با بیشترین شیب ممکن، محور y ها را با

کدام عرض، قطع می کند؟

(سراسری ریاضی فارغ ۹۷)

$$-\frac{8}{3} \quad (4)$$

$$-\frac{7}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{5}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$y' = -x^2 + 4x - 1$$

$$x=2 \rightarrow y'=3$$

$$x=2 \rightarrow y = -\frac{1}{3} + 1 - 2 = \frac{10}{3}$$

$$A(2, \frac{10}{3})$$

$$m=3 \rightarrow y=3x - \frac{1}{3}$$

۵۴- خطوط مماس بر منحنی $y = x^2 - a$ در نقاط تقاطع منحنی با محور x ها، بر هم عمودند.

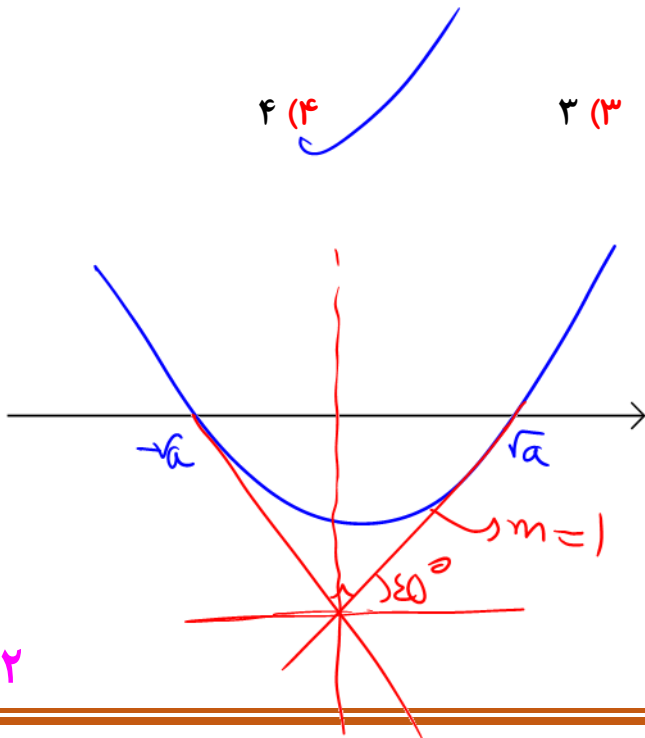
مقدار $\frac{1}{a}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



$$f'(x) = 2x$$

$$f'(\sqrt{a}) = 1$$

$$2\sqrt{a} = 1 \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

۵۵- آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$ در بازه‌ی $[5, 6]$ ، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این

تابع با کدام مقدار x است؟

(سراسری ریاضی ۹۹)

$$2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad (3)$$

$$3 + 2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$4 + \sqrt{2} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} \rightarrow \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} = \frac{3 - 2}{1} \rightarrow$$

$$x - 2 = \sqrt{21 - x^2} + 4x \quad \xrightarrow{x - 2 > 0} \quad x^2 - 4x + 4 = 21 - x^2 + 4x$$

$$2x^2 - 8x - 17 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{50}}{2}$$

$$\rightarrow x = \frac{4 + \sqrt{50}}{2}$$

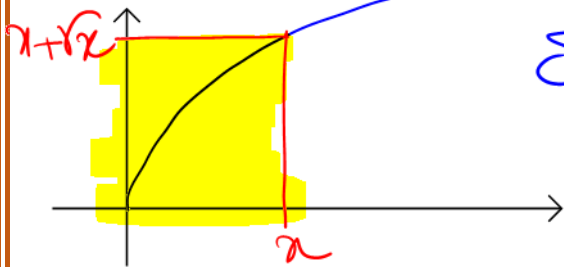
۵۶- مساحت مستطیلی که دو ضلع آن روی محورهای مختصات و یک رأس آن نقطه‌ای به طول x واقع بر منحنی $y = x + \sqrt{x}$ قرار دارد را با S نشان می‌دهیم. آهنگ تغییر S نسبت به x ، در $x = 4$ برابر چقدر است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)



$$S = x(x + \sqrt{x}) = x^2 + x^{\frac{3}{2}}$$

$$S' = 2x + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$x = 4 \rightarrow 1 + 3 = 4$$