

کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل سیزدهم : کاربرد مشتق

مهر داد عباسپور

یکنوایی

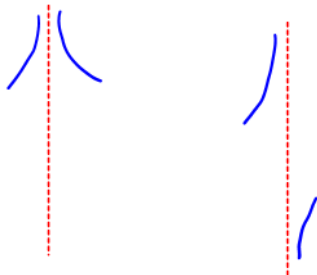
در یک بازه :

اگر $f'(x) > 0$ ، آنگاه f اکیداً صعودی است.

اگر $f'(x) < 0$ ، آنگاه f اکیداً نزولی است.

اگر $f'(x) = 0$ ، آنگاه f ثابت است.

اگر تابعی بجانب قائم داشته باشد، در هر بازه‌ای که تابع در هر دو سمت این بجانب تعریف شده باشد، غیر یکنواست.



۱- در بازه‌ی (a, b) ، نمودار تابع $f(x) = x + \frac{9}{x-10}$ بالای محور x ها و نزولی است. بیشترین

مقدار $b - a$ کدام است؟

۶ (۴)

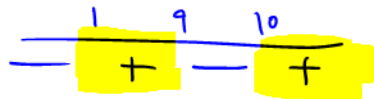
۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

$\begin{cases} y > 0 \\ y' < 0 \end{cases}$

$$\frac{x^2 - 10x + 9}{x - 10} > 0 \rightarrow \frac{(x-1)(x-9)}{x-10} > 0$$



$$1 - \frac{9}{(x-1)^2} < 0 \rightarrow \frac{(x-1)^2 - 9}{(x-1)^2} < 0 \rightarrow (x-1)^2 < 9 \rightarrow$$

$$-3 < x-1 < 3 \rightarrow 2 < x < 4$$

$$\rightarrow \frac{(2, 4)}{(10, 13)} \\ b - a = 3$$

۳

۲- اگر تابع $f(x) = (a-10)x^3 - 12x^2 - 3ax$ اکیداً نزولی باشد، a متعلق به بازه (m, n) است.

کمترین مقدار $n-m$ کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۲ (۲)

۸ (۱)

$$y' < 0 \rightarrow 3(a-10)x^2 - 24x - 3a < 0$$

$$(a-10)x^2 - 8x - a < 0$$

$$\begin{cases} a-10 < 0 \rightarrow a < 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta' < 0 \rightarrow 16 + a(a-10) < 0 \rightarrow a^2 - 10a + 16 < 0 \rightarrow 2 < a < 8 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \rightarrow \end{matrix} a \in (2, 8)$$

۴

۳- اگر $f(x) = \frac{ax+14}{x+2a}$ در بازه‌ی $(1, \infty)$ اکیداً نزولی باشد، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$x \in (1, +\infty) : y' < 0 \rightarrow \frac{2a^2 - 14}{(x+2a)^2} < 0 \rightarrow 2a^2 - 14 < 0 \rightarrow a^2 < 7$$

$$\rightarrow -\sqrt{7} < a < \sqrt{7}$$

س
 کابینه‌تیم
 $x = -2a \notin (1, +\infty) \rightarrow -2a \leq 1 \rightarrow a \geq -\frac{1}{2}$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} \leq a < \sqrt{7} \rightarrow a = 0, 1, 2$$

نقطه‌ی بحرانی

نقطه‌ای در دامنه‌ی تابع، که مشتق برابر صفر یا مشتق ناپذیر باشد.

اگر دامنه‌ی تابعی بازه‌ی $[a, b]$ باشد، نقاط a و b بحرانی محسوب می‌شوند.

نقاط اکسترمم و قضیه‌های مربوط به آن

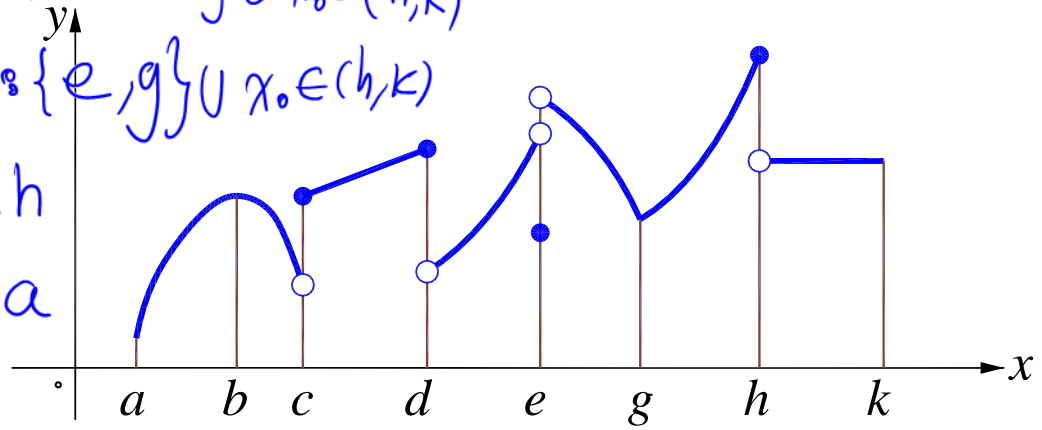
معرای: $\{a, b, c, d, e, g, h, k\}$

\circ max: $\{b, d, h\} \cup \chi_0 \in (h, k)$

\circ min: $\{e, g\} \cup \chi_0 \in (h, k)$

ρ max: h

ρ min: a



(۱) تعاریف اکسترمم نسبی و مطلق را بلد باشید :

نقطه‌ی c ماکسیمم نسبی f : در یک همسایگی c تابع تعریف شده و $f(x) \leq f(c)$

نقطه‌ی c ماکسیمم مطلق f در مجموعه‌ی I : برای هر x در I ، $f(x) \leq f(c)$

برای تعریف مینیمم نسبی و مطلق کافیه جهت نامساوی رو عوض کنیم.

(۲) منظور از مقدار اکسترمم عرض آن نقاط است. منظور از نقطه‌ی اکسترمم طول نقطه یا

مختصات آن است.

(۳) نقاط انتهایی دامنه اکسترمم نسبی نیستند ولی ممکن است اکسترمم مطلق باشند.

(۴) قضیه : اگر c یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$.

(۵) هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی بحرانی است، ولی هر نقطه‌ی بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی

نیست.



(۶) هر نقطه‌ی اکستریم مطلق که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده باشد، نقطه‌ی اکستریم نسبی نیز هست.

(۷) نقطه‌ی c هم‌زمان ماکسیمم و مینیمم نسبی است اگر و تنها اگر تابع در یک همسایگی آن ثابت باشد.

۴- کدام توضیح در مورد نقاط بحرانی تابع $f(x) = |x+1|\sqrt[3]{x-3}$ صحیح است؟

(۱) دو نقطه‌ی بحرانی با فاصله‌ی ۴
 (۲) دو نقطه‌ی بحرانی با فاصله‌ی $3\sqrt{2}$
 (۳) سه نقطه‌ی بحرانی، رئوس مثلثی به مساحت ۶
 (۴) سه نقطه‌ی بحرانی، رئوس مثلثی به مساحت ۴

عزای : $x = -1$ / $x = 3$
 سه نقطه
 سه نقطه

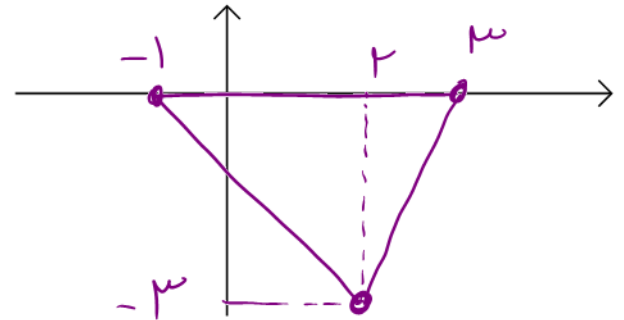
$$y' = 0 \rightarrow (\pm (x+1)\sqrt[3]{x-3})' = 0$$

$$\sqrt[3]{x-3} + (x+1) \frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}} = 0$$

$$\frac{3(x-3) + x+1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}} = 0$$

$$2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۱۰



$$S = \frac{1/2 \times 6}{1} = 3$$

۵- در تابع با ضابطه $f(x) = x|x| - 2x$ ، فاصله دو نقطه‌ی ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی آن

(سراسری تیرگی فارغ ۹۱)

کدام است ؟

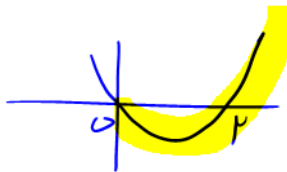
۴ (۴)

$3\sqrt{2}$ (۳)

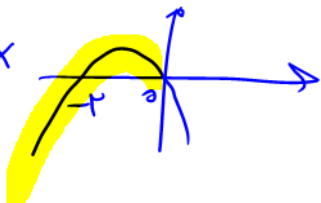
۳ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

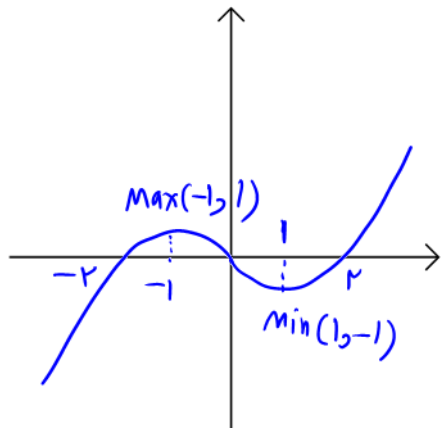
$x \geq 0 : y = x^2 - 2x$



$x < 0 : y = -x^2 - 2x$



$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$$



یافتن مقادیر اکسترمم مطلق (و تعیین برد) توابع

اگر تابع f در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد، حتماً ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد. برای پیدا کردن مقادیر آنها، کافی است مقدار تابع را در نقاط بحرانی بازه به دست آورده و مقایسه کنیم.

مثال: مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x - \sqrt{2x - x^2}$ ؟

$$D_f : 2x - x^2 \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 2 \rightarrow D_f = [0, 2] \rightarrow \text{عزای } 0, 2$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = 0 \rightarrow 1 = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \rightarrow$$

$$\sqrt{2x-x^2} = 1-x \xrightarrow{(\cdot)^2} 2x-x^2 = x^2-2x+1 \rightarrow 2x^2-4x+1=0$$

$$12 \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \xrightarrow{x \leq 1} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	0	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	2
y	0	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	2
		min	max

۶- اگر برد تابع $f(x) = 3\sqrt{x+5} + 4\sqrt{20-x}$ بازه‌ی $[a, b]$ باشد، مقدار $b - a$ کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

$$D_f = [-5, 20]$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x+5}} + \frac{4(-1)}{2\sqrt{20-x}} = 0 \rightarrow \frac{3}{\cancel{2}\sqrt{x+5}} = \frac{2}{\cancel{2}\sqrt{20-x}}$$

$$110 - 9x = 14x + 10 \rightarrow x = 5$$

x	-5	5	20
y	20	28	18

$$I_f = [15, 20]$$

۷- اگر $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = x^3 - 12x + 5$ باشد، مجموع مقادیر ماکسیمم و مینیمم $g \circ f$ در بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۱ (۱)

$$f(x) = x^2 - 2x \quad [-1, 2]$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1$$

x	-1	1	2
y	3	-1	0
	max	min	

$$\rightarrow f \text{ بر } [-1, 2]$$

$$g(x) = x^3 - 12x + 5 \quad x \in [-1, 2]$$

$$g'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow x = 2$$

x	-1	2	3
y	14	-11	-8
	max	min	

۱۴

یافتن نقاط اکسترمم نسبی

(۱) اگر برای تابع f نقطه‌ی c بحرانی و پیوسته باشد، با تعیین علامت f' در اطراف آن وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع و در نتیجه اینکه نقطه ماکسیمم یا مینیمم نسبی است (یا هیچ کدام) معلوم می‌شود.

مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^2|x-3|$ را بیابید.

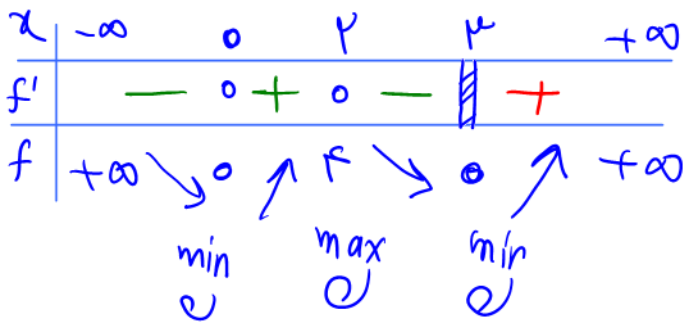
نقطه بحرانی: $x=3$

$$y' = 0 \rightarrow \pm (x^3 - 3x^2)' = 0$$

$$3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0, 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 3: y' = 3x^2 - 6x \\ x < 3: y' = -3x^2 + 6x \end{array} \right.$$

$$15 \left\{ \begin{array}{l} x > 3: y' = -3x^2 + 6x \\ x < 3: y' = 3x^2 - 6x \end{array} \right.$$

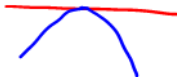


(۲) اگر مشتق تابع f در نقطه‌ی c صفر باشد، با تعیین علامت f'' در اطراف آن وضعیت تقعر منحنی و در نتیجه اینکه نقطه ماکسیمم یا مینیمم نسبی است (یا هیچ کدام) معلوم می‌شود.

مثال: نقطه‌ای به طول ۱، چه نقطه‌ای برای تابع $f(x) = 2x - x^4 + x^2$ است؟

$$f'(x) = 2 - 4x^3 + 2x \rightarrow f'(1) = 0$$

local max



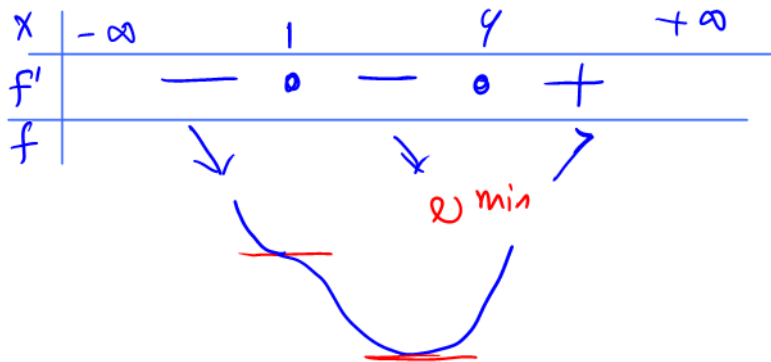
$$f''(x) = -12x^2 + 2 \rightarrow f''(1) < 0$$

(۳) هرگاه مشتق تابع f در نقطه‌ی c صفر باشد :

(الف) اگر f' در c تغییر علامت دهد، این نقطه اکسترمم نسبی f است.

(ب) اگر f' در c تغییر علامت ندهد، این نقطه، اکسترمم نسبی f نیست.

مثال : در تابع f ، داریم $f'(x) = (x-1)^2(x-6)$. نقاط اکسترمم f ؟

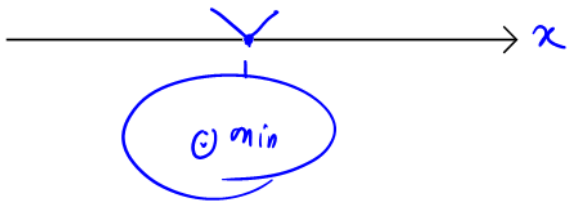


(۴) اگر مقدار تابع f در نقطه‌ی c برابر صفر باشد و در این نقطه تغییر علامت ندهد، این نقطه اکسترمم نسبی f است.

مثال: در تابع $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2+1}$ نقطه‌ی $x=1$ ؟

$$f(1) = 0$$

$$f(x) > 0 \text{ (اطراف ۱)}$$



(۵) وقتی در تابع f که مشتق پذیر است، صورت سوال خبر می دهد که نقطه $M(a,b)$ ، نقطه ای اکسترمم است، در این صورت :

$$f(a) = b \quad , \quad f'(a) = 0$$

ضمناً اگر $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ باشد، به جای $f'(a) = 0$ کافی است نقطه ای $M(a,b)$ در هوپیتال تابع قرار دهیم. یعنی :

$$f(a) = b \quad , \quad \frac{g(a)}{h(a)} = b \quad (h(a) \neq 0)$$



$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

در تابع $f(x)$ در $x=1$:
 نقطه $(1, 2)$ در $+\infty$ تابع برابر

مثال: در تابع $f(x) = \frac{ax}{x^2+b}$ مختصات نقطه‌ی ماکسیمم نسبی $A(1,2)$ باشد، مقادیر a و b را

بیابید.

$$f(1) = 2 \rightarrow \frac{a}{b+1} = 2$$

$$b = 1$$

$$f'(1) = 0 \rightarrow \text{Hop: } y = \frac{a}{rx} \rightarrow 2 = \frac{a}{r} \rightarrow a = 2r$$

(۶) اگر در تابع f که مشتق پذیر است، عرض اکستریم نسبی k باشد، در این صورت خط $y = k$ بر تابع مماس است و بنابراین از قطع دادن آن با تابع معادله‌ای با ریشه‌ی مضاعف حاصل می‌شود.

مثال: در تابع $f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$ عرض نقطه‌ی مینیمم نسبی -2 است. مقدار a را بیابید.



$y = -2$ بر تابع مماس است.

قطع / ریشه مضاعف

$$\frac{x+a}{x^2+1} = -2 \rightarrow 2x^2 + x + a + 2 = 0$$

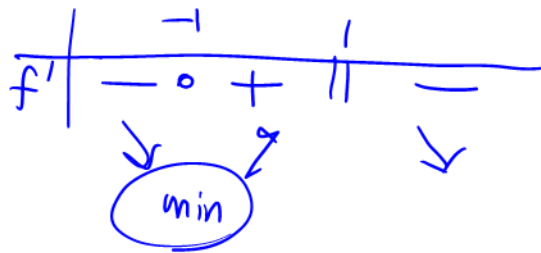
$$\Delta = 0 \rightarrow 1 - 4(a+2) = 0 \rightarrow a = \frac{1}{4} - 2$$

۸- نوع نقطه‌ی اکسترمم تابع $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$ و فاصله‌ی آن تا مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) ماکسیمم، $\sqrt{2}$ (۲) مینیمم، $\sqrt{2}$ (۳) ماکسیمم، $\sqrt{5}$ (۴) مینیمم، $\sqrt{5}$

$$f'(x) = \frac{4(x-1)^2 - 2(x-1)(4x)}{(x-1)^4} = \frac{4(x-1)(x-1-2x)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$$



Min(-1, -1)

$$\hookrightarrow d = \sqrt{2}$$

۹- اگر $f'(x) = x^3 - 3x + 2$ باشد، نقاط $x = -2$ و $x = 1$ برای تابع f به ترتیب چه نقطه‌ای است؟

(۱) مینیمم نسبی ، ماکسیمم نسبی

(۲) ماکسیمم نسبی ، مینیمم نسبی

(۳) اکسترمم نیست ، مینیمم نسبی

(۴) اکسترمم نیست ، ماکسیمم نسبی

$$f'(x) = (x-1)^2(x+2)$$

x		-2		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$+$
f		\searrow	\nearrow	\nearrow	
		\min	\times		

$$f''(x) = 3x^2 - 3$$

۲۳ /

$$\begin{cases} f'(1) = 0 & f''(1) = 0 & ?? \\ f'(-2) = 0 & f''(-2) > 0 & \text{min} \end{cases}$$

۱۰- اگر $(4, 12)$ مختصات نقطه‌ی اکسترمم تابع $f(x) = a\sqrt{x} + bx$ باشد، مقدار b و نوع اکسترمم

$$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} + b$$

کدام است؟

(۱) -6 ، ماکسیمم (۲) -6 ، مینیمم (۳) -3 ، ماکسیمم (۴) -3 ، مینیمم

$$\begin{cases} f(4) = 12 \\ f'(4) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + 4b = 12 \\ \frac{a}{4} + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 2b = 6 \\ a + 4b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - 3 = \frac{4 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

x	ε		
f'	+	0	-

$$f''(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}} \rightarrow f''(4) < 0$$

↗ ↘
max

۱۱- مجموع طول های نقاط ماکسیمم و می نیمم نسبی تابع $y = mx^3 - 3x^2 - 12x$ برابر ۱ است.

۲

عرض نقطه ی مینیمم نسبی کدام است ؟

۲۰ (۴)

۷ (۳)

-۷ (۲)

-۲۰ (۱) ✓

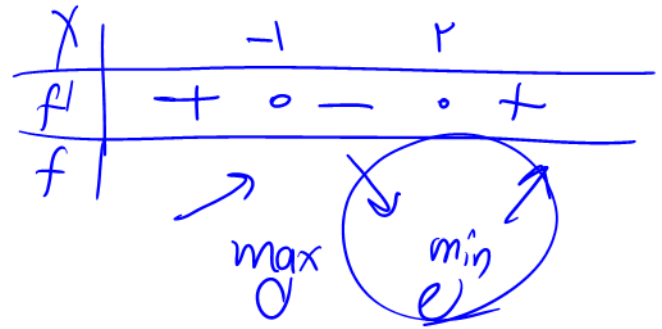
$$y' = 0 \rightarrow mx^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x_{\max} + x_{\min} = 1 \rightarrow \frac{2}{m} = 1$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$\rightarrow m = 2$$

$$\rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$



$$f(2) = 14 - 12 - 24$$

۲۵ = -۲۰

۱۲- اگر نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x+ax^2+1}{bx+1}$ مقدار a برابر کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳) ✓

۲ (۲)

۱ (۱)

$$f(1) = -2$$

$$f'(1) = 0 \xrightarrow{(1, -2)} \text{Hop: } y = \frac{1+2ax}{b}$$

$$\frac{a+2}{b+1} = -2$$

$$\frac{2a+1}{b} = -2$$

$$\begin{cases} a+2b = -4 \\ 2a+b = -1 \end{cases}$$

$$\ominus \rightarrow a = 2$$

۲۶

۱۳- مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ ، کدام است؟

(سراسری تجربی خارج ۹۹)



$$1 + \sqrt{5} \quad (2)$$

$$-1 + \sqrt{5} \quad (1) \quad \checkmark$$

$$1 + \sqrt{3} \quad (4)$$

$$-1 + \sqrt{3} \quad (3)$$

$y = k$ به عنوان تابع در نظر است.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} = k$$

ضرب طرفین در مخرج $\rightarrow x^2 + 2x - 3 = kx^2 + k$

$$(k-1)x^2 - 2x + (k+3) = 0$$

$$\Delta' = 0 \rightarrow 1 - (k+3)(k-1) = 0 \rightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \quad k = -1 \pm \sqrt{4}$$

$$x+y=10 \rightarrow (xy)_{\max} \text{ : } x=y=5 \rightarrow 5 \times 5$$

بهینه سازی

$$x+y=12 \rightarrow (x^2y)_{\max} \begin{cases} x=2k \\ y=k \end{cases} \rightarrow 2k+k=12 \rightarrow k=4 \begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases} \text{ نکته :}$$

اگر x و y مثبت و $x+y=k$ باشد، عبارت $x^n y^m$ وقتی ماکسیمم است که $\frac{x}{n} = \frac{y}{m}$

مثال : اگر x و y مثبت و $2x^2 + y^3 = 10$ باشد، بیشترین مقدار xy^6

$$2x^2 + y^3 = 10$$

$$x \quad y^6$$

$$\begin{cases} 2x^2 = \frac{k}{2} \\ y^3 = 2k \end{cases} \rightarrow \frac{k}{2} + 2k = 10 \rightarrow k=4$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 2 \\ y^3 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

۱۴- کوتاه ترین فاصله ی نقطه $A(5,0)$ از نقاط منحنی به معادله ی $y = \sqrt{2x+7}$ ، کدام است ؟

(سراسری تیربی فارغ ۹۹) (x, y)

۴/۵ (۲)

۴ (۱) ✓

$3\sqrt{2}$ (۴)

۵ (۳)

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + y^2} \xrightarrow{y = \sqrt{2x+7}} d = \sqrt{x^2 - 10x + 18 + 2x + 7}$$

$$d = \sqrt{x^2 - 8x + 25} \quad d' = 0 \rightarrow 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 4$$

$$d_{\min} = \sqrt{16 - 32 + 25} = 3 \quad \checkmark$$

۱۵- بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{12-x}$ ، در ناحیه‌ی اول واقع شود، کدام است؟

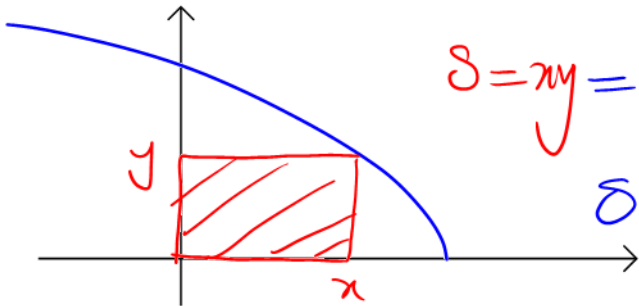
(سراسری تیرگی ۹۸)

$8\sqrt{3}$ (۲)

$8\sqrt{2}$ (۱)

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)



$$S = xy = x\sqrt{12-x} = \sqrt{12x^2 - x^3}$$

$$S' = 0 \rightarrow 24x - 3x^2 = 0$$

$$x = 0, 1$$

$$x = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow S = 14$$

۱۶- بیشترین مساحت از زمینی را که می توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند مترمربع است؟

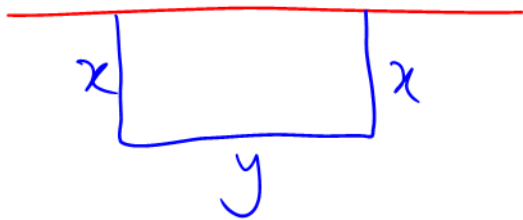
(سراسری ۹۱)

۹۶۸ (۲) ✓

۹۵۸ (۱)

۹۸۸ (۴)

۹۷۸ (۳)



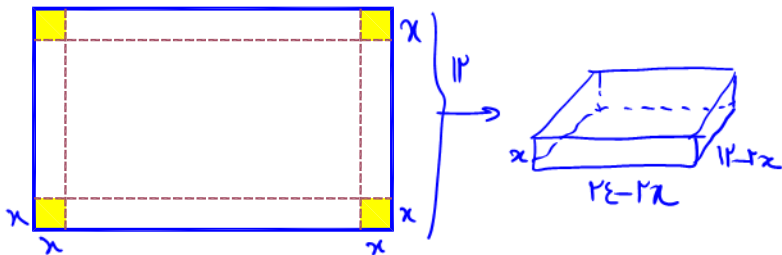
$$2x + y = 11$$

$$S = xy = x(11 - 2x) = 11x - 2x^2$$

$$S' = 0 \rightarrow 11 - 4x = 0 \rightarrow x = 2.75$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2.75 \\ y = 5.5 \end{array} \right\} \rightarrow S = 2.75 \times 5.5 = 15.125$$

۱۷- می خواهیم از یک مقوای مستطیلی ۱۲×۲۴ با بریدن چهار مربع به ضلع x از چهار گوشه ی آن و تا کردن از خط چین ها، یک جعبه در باز بسازیم. برای کدام x حجم جعبه ماکسیمم است؟



$$\begin{array}{ll}
 2\sqrt{3} & (۲) \\
 2\sqrt{2} & (۱) \\
 6 - 2\sqrt{3} & (۴) \\
 4 - \sqrt{2} & (۳)
 \end{array}$$

$$2x < 12$$

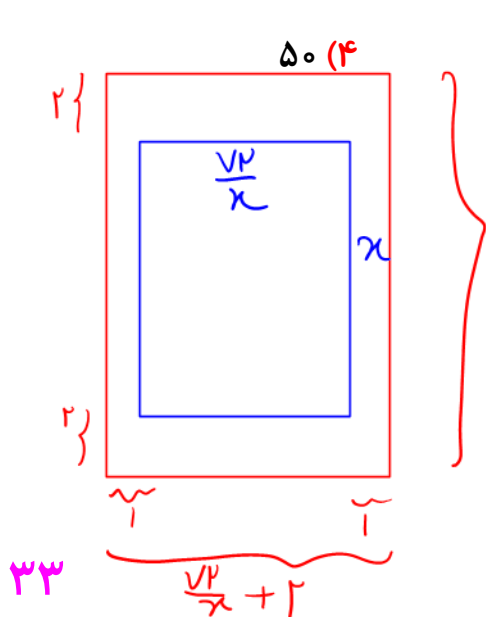
$$x < 4$$

$$V = x(12-2x)(24-2x) = 24x^2 - 12x^3 + 24x^2$$

$$V' = 0 \rightarrow 12x^2 - 12x^2 + 24 = 0 \rightarrow x^2 - 12x + 24 = 0 \rightarrow$$

$$x = 6 \pm \sqrt{12} \rightarrow x = 4 - 2\sqrt{3}$$

۱۸- یک صفحه‌ی مستطیل شکل، شامل یک متن با مساحت ۷۲ است. اگر حاشیه‌های بالایی و پایینی برابر ۲ و حاشیه‌های کناری برابر ۱ باشند، در صورتی که مساحت صفحه مینیمم باشد، محیط آن چقدر است؟



۴۸ (۳) ✓

۴۶ (۲)

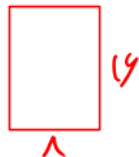
۴۴ (۱)

$$S = (x+4)\left(\frac{v_p}{x} + 2\right)$$

$x+4$

$$S = 10 + 2x + \frac{211}{x}$$

$$S' = 0 \rightarrow 2 - \frac{211}{x^2} = 0 \rightarrow x = 11$$



$$S_{\text{کل}} = 48$$

۱۹- از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا

(سراسری تیربی ۹۹)

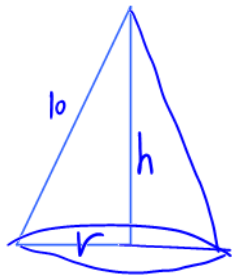
حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیش‌ترین باشد؟

$$\frac{\sqrt{2}}{1} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{1} \quad (۱)$$



$$h^2 + r^2 = 100 \quad *$$

$$V = \frac{1}{2} \pi r^2 h = \frac{1}{2} \pi (100 - h^2) h = \frac{\pi}{2} (100h - h^3)$$

$$V' = 0 \rightarrow 100 - 3h^2 = 0$$

$$\begin{cases} h^2 = \frac{100}{3} \\ r^2 = \frac{200}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{r^2}{h^2} = 2$$

$$\rightarrow \frac{r}{h} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

۲۰- در نقطه‌ای با کدام طول روی نیمساز ربع اول، مجموع فواصل از نقاط $A(1,3)$ و $B(8,11)$ می‌نیمم می‌شود؟

۴ (۴)

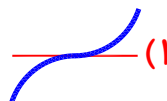
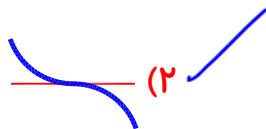
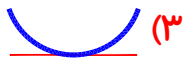
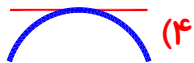
۳ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

مسئله‌های نموداری

۲۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 3x - 1}$ در یک همسایگی نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر آن به کدام صورت است؟



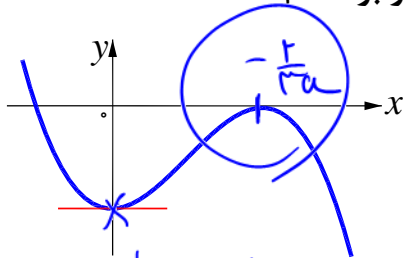
$$y' = \frac{2x(x^3 + 3x - 1) - (3x^2 + 3)x^2}{()^2} = \frac{-x^2 + 3x^2 - 2x}{()^2} = \frac{-x(x^2 - 2x + 2)}{()^2}$$

$$y' = \frac{-x(x-1)(x^2 + x + 2)}{()^2} \rightarrow (x-1)(x+2)$$

$$y' = \frac{-x(x-1)^2(x+2)}{(x^3 + 3x - 1)^2}$$

y	x	1
y'	-	0
y	x	1

۲۲- شکل مقابل نمودار تابع $y = ax^3 + x^2 + bx - 3$ است. مقدار a برابر کدام است؟



$$y = ax^3 + x^2 - 3$$

$$y' = 3ax^2 + 2x$$

$$-\frac{2}{9} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$-\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{9} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\hookrightarrow y'(0) = 0 \rightarrow 3ax^2 + 2x + b = 0 \rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{2a}}$$

$$y' = 0 \rightarrow 3ax^2 + 2x = 0 \rightarrow x(3ax + 2) = 0 \rightarrow x = 0, -\frac{2}{3a}$$

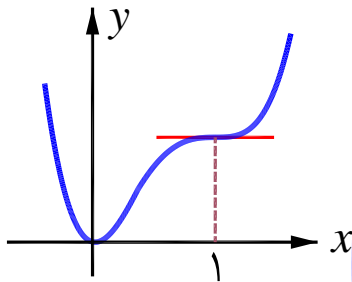
$$\frac{-2}{3a} > 0 \rightarrow a < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{2}{3a} \\ 0 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{-1}{3a^2} + \frac{\varepsilon}{9a^2} - 3 = 0 \rightarrow \frac{\varepsilon}{3a^2} = 3$$

$$a^2 = \frac{\varepsilon}{11} \rightarrow a = -\frac{2}{9}$$

۲۳- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ است. a کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۸)



$$f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$$

$$f'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$-8 \quad (1) \quad \checkmark$$

$$-4 \quad (2)$$

$$-5 \quad (3)$$

x	0	1
y'	$-$	$+$

y ↘ ↗ ↗

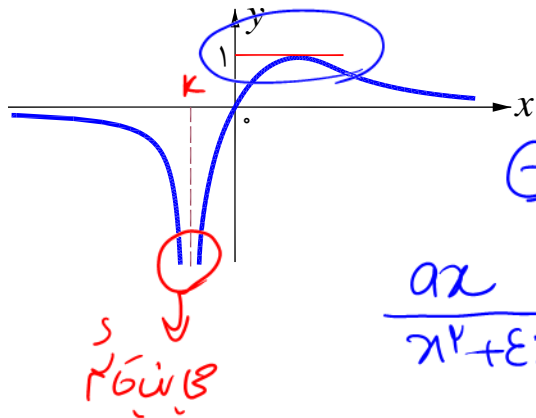
حول y' در $x=1$
تبدیل می‌شود

$$y' = 12(x-0)(x-1)^2$$

$$y' = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$$

$$\begin{cases} a = -12 \\ b = 12 \\ c = 0 \end{cases}$$

۲۴- شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = \frac{ax}{x^2 + bx + 4}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟



۲ (۲)

۸ (۱)

۴ (۴)

۱۲ (۳) ✓

۱ = $\frac{ax}{x^2 + bx + 4}$ \rightarrow $x^2 + bx + 4 = ax$

$$\frac{ax}{x^2 + bx + 4} = 1 \rightarrow x^2 + (4-a)x + 4 = 0$$

$$\rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow 4-a = -4$$

$$a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = -\infty$$

مخرج \rightarrow $x^2 + bx + 4 = (x+2)^2$

$$x^2 + bx + 4 = (x+2)^2 \rightarrow b = 4$$

۲۵- اگر f تابع پیوسته و نمودار تابع مشتق آن شکل روبه‌رو باشد، تعداد نقاط ماکسیمم و مینیمم

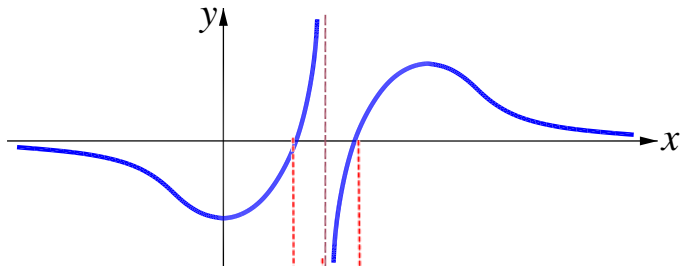
نسبی f به ترتیب کدام است؟

۲ و ۲ (۲)

۱ و ۱ (۱)

۱ و ۲ (۴)

۲ و ۱ (۳) ✓



f' — + — +

f ↓ ↑ ↓ ↑

min max

min

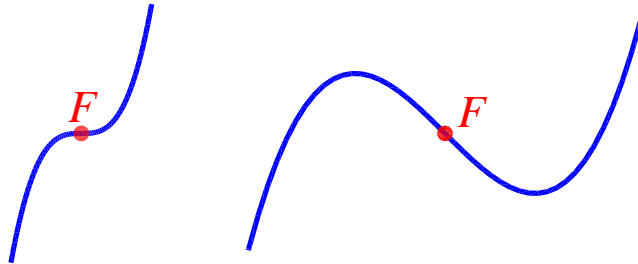
تقعر منحنی و نقاط عطف

چند نقطه عطف معروف :

توابع درجه سوم

(الف) این تابع، همواره یک نقطه‌ی عطف دارد که مرکز تقارن آن است.

(ب) نمودار تابع به یکی از شکل‌های زیر است. (از رسم حالت‌هایی که با تقارن به دست می‌آید صرف‌نظر شده است.)



(پ) در حالتی که نمودار تابع ماکسیمم و می‌نیمم نسبی دارد، مرکز تقارن تابع که همان نقطه‌ی عطف است وسط نقاط ماکسیمم و می‌نیمم قرار دارد.

تابع هموگرافیک

به تابع غیر خطی $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، تابع هموگرافیک می‌گوییم.

(الف) در حالت $c = 0$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ، این تابع خطی است. مثلاً تابع $f(x) = \frac{6x+12}{3x+6}$ هموگرافیک

نیست زیرا:

$$f(x) = \frac{6x+12}{3x+6} = \frac{6(x+2)}{3(x+2)} \Rightarrow f(x) = 2; (x \neq -2)$$

(ب) تابع هموگرافیک یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد.

محل تلاقی مجانب‌ها مرکز تقارن است.

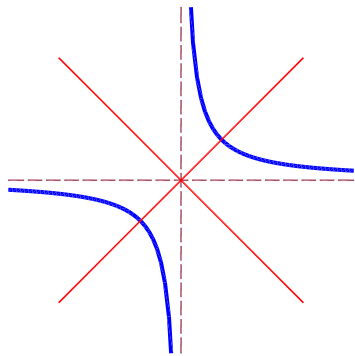
دو خطی که از مرکز تقارن این تابع می‌گذرند و شیب‌های ۱ و -۱ دارند، محورهای تقارن

این تابع هستند.

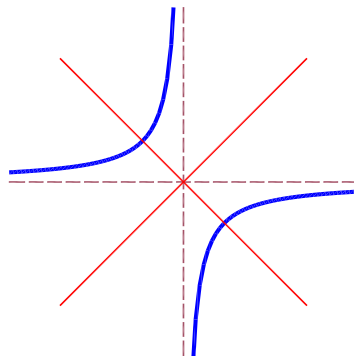
ویژه رشته ریاضی

(پ) نمودار تابع هموگرافیک همراه با مجانب‌ها و محورهای تقارن آن در شکل‌های زیر رسم

شده‌اند :



$$f'(x) < 0 \Rightarrow ad - bc < 0$$



$$f'(x) > 0 \Rightarrow ad - bc > 0$$

۲۶- در بازه (a, b) ، منحنی $f(x) = \frac{-1}{x^2 + 48}$ صعودی با تقعر رو به بالاست. بیشترین مقدار $b - a$

کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

∞ (۱)

۲۷- فاصله‌ی نقاط عطف منحنی $y = x|x^2 - 3x|$ کدام است؟

$$2\sqrt{5} \text{ (۴)}$$

$$2\sqrt{2} \text{ (۳)}$$

$$\sqrt{5} \text{ (۲)}$$

$$\sqrt{2} \text{ (۱)}$$

۲۸- خط راستی بر نمودار تابع $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ مماس شده و از آن عبور می کند. شیب این

(سراسری ریاضی ۹۷)

خط، کدام است؟

$$\frac{5}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (۱)$$

۲۹- با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ ، به ازای کدام مجموعه مقادیر m ،

(سراسری تیربی ۹۷)

معادله $f(x) = m$ ، فقط دارای یک ریشه‌ی حقیقی است ؟

(۱) $m < 2$ یا $m > 7$ (۲) $m < 3$ یا $m > 6$ (۳) $m > 7$ یا $m < 3$ (۴) $m > 6$ یا $m < 2$

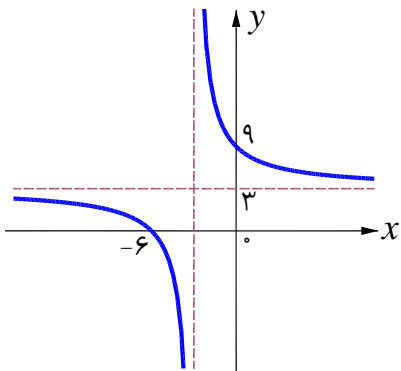
۳۰- در تابع هموگرافیک شکل زیر، مقدار $f(1)$ برابر کدام است؟

۷/۵ (۲)

۸ (۱)

۶/۵ (۴)

۷ (۳)



آزمون:

۳۱- تابع $f(x) = \frac{x-3}{x^2-4}$ در بازه (a,b) اکیداً صعودی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

$$\sqrt{5}-1 \text{ (۴)}$$

$$\sqrt{5}+1 \text{ (۳)}$$

$$2\sqrt{5} \text{ (۲)}$$

$$\sqrt{5} \text{ (۱)}$$

$$f'(x) = \frac{1(x^2-4) - 2x(x-3)}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2+4x-8}{(x^2-4)^2} > 0 \rightarrow 3 \pm \sqrt{5}$$

$$\rightarrow \pm 2$$

x	$-\infty$	-2	$3-\sqrt{5}$	2	$3+\sqrt{5}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	\downarrow		\uparrow		\downarrow	

$$b-a = \sqrt{5}-1 \quad b-a = \sqrt{5}+1$$

۳۲- اگر برای هر m از بازه‌ی (a, b) تابع $f(x) = mx^2 + (m+12)x$ در بازه‌ی $(-\infty, 1]$ اکیداً صعودی باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

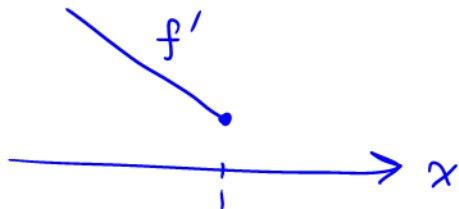
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$x \leq 1$: $y' = 2mx + (m+12) \geq 0$



$2m < 0$



$-4 \leq m \leq 0$

$x=1 \rightarrow 2m + m + 12 \geq 0$

$m=0 \rightarrow f(x) = 12x$ ✓

۱۳۳- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2x\sqrt{x} + bx & x > 1 \\ 3x + a & x \leq 1 \end{cases}$ یکنوای اکید باشد، اگر b کمترین مقدار ممکن باشد،

$$2x\sqrt{x} + bx$$

بیشترین مقدار a کدام است؟

-۴ (۴) ✓

-۳ (۳)

-۵ (۲)

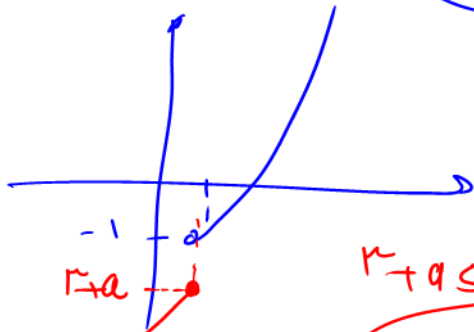
-۶ (۱)

$$x \geq 1 : y' = 3\sqrt{x} + b \geq 0 \rightarrow 3 + b \geq 0 \rightarrow b \geq -3$$

$$b = -3$$

$$x < 1 : y' = 3 > 0 \checkmark$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sqrt{x} - 3x & x > 1 \\ 3x + a & x \leq 1 \end{cases}$$



$$3 + a \leq -1$$

$$a \leq -4$$

۵۳

۳۴- تابع $f(x) = x^2|x-12|$; $x > 0$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$

کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۲ (۲)

۸ (۱)

$x > 12$: $y = x^3 - 12x^2$ $y' = 3x^2 - 24x = 3x(x-8) < 0 \Rightarrow 0 < x < 8 \xrightarrow{\cap} \emptyset$

$0 < x < 12$: $y = -x^3 + 12x^2 \dots \dots \dots \Rightarrow x < 0 \vee x > 12 \xrightarrow{\cap} x \in (12, \infty)$

۳۵- مساحت چند ضلعی که رئوس آن نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-1}$ باشند، چقدر است؟

$$4(\sqrt{3}-1) \quad (۴)$$

$$2(\sqrt{3}-1) \quad (۳)$$

$$4(\sqrt{2}-1) \quad (۲) \quad \checkmark$$

$$2(\sqrt{2}-1) \quad (۱)$$

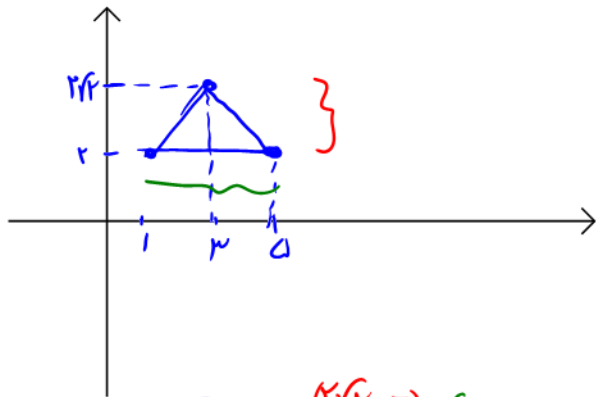
$D_f = [1, 5]$ بحرانی: $x=1, 5$

$$y' = 0 \rightarrow \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{5-x}} \rightarrow x-1 = 5-x$$

$$x = 3$$

۵۵



$$\delta = \frac{(2\sqrt{2}-2) \times \epsilon}{2}$$

$$\delta = \epsilon(\sqrt{2}-1)$$

۱۳۶- در تابع $y = x|x-2| - 2x$ فاصله‌ی نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی (در صورت وجود) کدام است؟

۵ (۲)

۴ (۱)

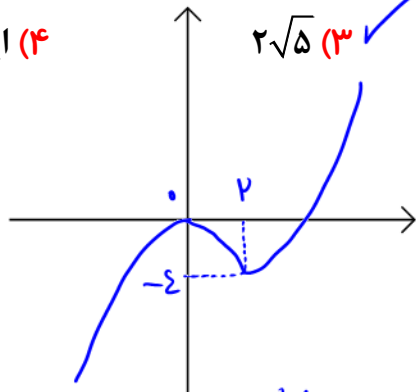
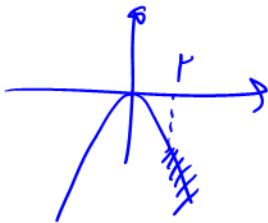
۳ (۳) ✓

(۴) این تابع فقط یک اکسترمم نسبی دارد.

$$x \geq 2: y = x^2 - 2x - 2x = x^2 - 4x$$



$$x < 2: y = -x^2 + 2x - 2x = -x^2$$



max | 0 min | -4

$$d = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

۳۷- اگر مجموع مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = a(x + \frac{4}{x})^2$ در بازه $[1, 4]$ برابر ۸۲ باشد، مقدار a کدام است؟

۷ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۶ (۱)

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2a(x + \frac{4}{x})(1 - \frac{4}{x^2}) = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

x	1	2	4
y	17a	14a	10a

Max, Min \rightarrow 14a, 10a

$$14a + 10a = 82 \rightarrow a = 5$$

۳۸- کدام توضیح در مورد نقاط اکسترمم تابع $f(x) = x + 1 + \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$ صحیح است؟

(۲) مینیمم مطلق برابر ۱- $\sqrt[3]{2}$

(۱) مینیمم مطلق برابر ۱ ✓

(۴) ماکسیمم مطلق برابر ۶

(۳) ماکسیمم مطلق برابر ۴

$$x + 1 + \sqrt[3]{3x^2 - x^3} \geq \underbrace{x + 1 + \sqrt[3]{-x^3}}_{x + 1 - x = 1}$$

$$f(x) \geq 1 \rightarrow \underline{\text{Min} = 1}$$

$$f(0) = 1$$

۳۹- فاصله نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ ، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام

(سراسری تیربی ۹۹)

است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱) ✓

$$Df = [0, 4] \rightarrow y' = 1 + \frac{\varepsilon - 2x}{2\sqrt{\varepsilon x - x^2}} = 0 \rightarrow 1 = \frac{2(x-2)}{2\sqrt{\varepsilon x - x^2}} \rightarrow$$

$$\sqrt{\varepsilon x - x^2} = x - 2 \xrightarrow{x-2 \geq 0} \varepsilon x - x^2 = x^2 - \varepsilon x + \varepsilon \rightarrow$$

$$2x^2 - \varepsilon x + \varepsilon = 0 \rightarrow x^2 - \frac{\varepsilon}{2}x + \frac{\varepsilon}{2} = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2} \xrightarrow{x \geq 2} x = 2 + \sqrt{2}$$

$$y = x + \sqrt{4 - (x-2)^2} \xrightarrow{x=2+\sqrt{2}} y = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{\varepsilon - 2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{Max}(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}) \quad y - x = 0 \rightarrow d = \frac{|y - x|}{\sqrt{2}} = \frac{2 + 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

۴۰- فاصله‌ی نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{|4x-4|}{x^2}$ چقدر است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$x=1 : \min$ $\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) \geq 0 \end{array} \right. \quad \min = (1, 0)$

$$y = \pm \epsilon \left(\frac{x-1}{x^2} \right) \rightarrow y' = \pm \epsilon \left(\frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^3} \right) = \pm \epsilon \left(\frac{-x+2}{x^3} \right) = 0$$

$\rightarrow x=2$

$A \mid 0 \quad B \mid 2 \quad \rightarrow d = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

۴- دو نقطه به طول های ۲ و ۱- نقاط بحرانی تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + 12x$ هستند. عرض نقطه‌ی

ماکسیم نسبی کدام است؟

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 12$$

۲۰ (۴)

-۲۰ (۳)

۱۱ (۲)

-۱۱ (۱)

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \underbrace{-4(x-2)(x+1)}_{x^2 - x - 2} = \underbrace{-4x^2 + 4x + 12}_{\substack{a = -4 \\ b = 4}}$$

$a = -4, b = 4$

$f(x) = -4x^3 + 4x^2 + 12x$

x	-1	2
f'	-	+
f	↓	↑

(max)

۶۱ $f(2) = -16 + 12 + 24 = 20$

۴۲- به ازای کدام مقادیر a ، تابع $f(x) = x + \frac{a}{x+1}$ ، اکسترمم نسبی ندارد؟

(۴) هیچ مقدار a

(۳) $a \geq 0$

(۲) $a \leq 0$

(۱) هر مقدار a

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow (x+1)^2 = a$$

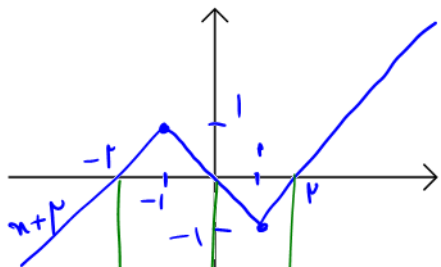
این معادله نباید ریشه داشته باشد.

$$a \leq 0$$

۴۳- اگر $f'(x) = x + |x-1| - |x+1|$ باشد، کدام گزینه، تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع f را

درست توضیح می دهد؟

$$x > 1: x + x - 1 - x - 1 = x - 2$$



(۱) فقط یک نقطه‌ی مینیمم نسبی

(۲) فقط یک نقطه‌ی ماکسیمم نسبی

(۳) دو نقطه‌ی مینیمم نسبی و یک نقطه‌ی ماکسیمم نسبی ✓

(۴) یک نقطه‌ی مینیمم نسبی و دو نقطه‌ی ماکسیمم نسبی

f'	-	+	-	+
f	↓	↑	↓	↑
	min	max	min	

۱۴۴- اگر $A(1,1)$ یکی از نقاط اکستریمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2 + a}{bx + 2}$ باشد، طول نقطه‌ی اکستریمم

نسبی دیگر آن کدام است؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

$$A(1,1) \rightarrow f(1) = 1$$

$$f'(1) = 0 \rightarrow \text{H.o.P: } y = \frac{2x}{b} \xrightarrow{(1,1)}$$

$$\begin{cases} \frac{1+a}{b+2} = 1 \\ \frac{2}{b} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x + 2} \quad f'(x) = \frac{2x(2x+2) - 2(x^2+2)}{(2x+2)^2} = \frac{2(x^2+2x-2)}{(2x+2)^2} = 0$$

$$\rightarrow x = 1, -2$$

۶۴

۴۵- عرض نزدیک ترین نقطه‌ی روی منحنی $y = x^2 - 8x + 1$ از نقطه‌ی $A(4, 3)$ کدام است؟

$$\frac{7}{2} \quad (4, 3)$$

۳ (۳)

۲ (۲)

$$\frac{5}{2} \quad (1)$$

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}$$

$$y = (x-4)^2 - 18 \rightarrow (x-4)^2 = y + 18$$

$$d = \sqrt{y+18 + y^2 - 6y + 9} = \sqrt{y^2 - 5y + 27} \quad d' = 0$$

$$2y - 5 = 0 \rightarrow y = \frac{5}{2}$$

۱۴۶- بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس

دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

(سراسری تیرین فارغ ۹۸)

۳۶ (۴)

۲۷ (۳)

۲۴ (۲)

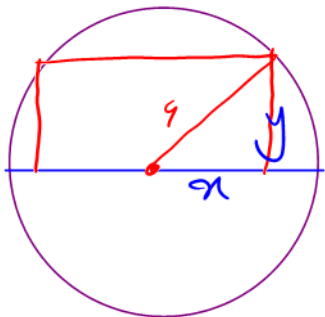
۱۸ (۱)

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$\delta = 2xy = 2x\sqrt{36 - x^2} = 2\sqrt{36x^2 - x^4}$$

$$\delta' = 0 \rightarrow \sqrt{72x - 4x^3} = 0 \rightarrow x = 0, \pm 3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{2} \\ y = 3\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \delta = 2xy = 36$$



۴۷- می‌خواهیم یک زمین مستطیل شکل به مساحت ۳۰۰ متر مربع را دیوارکشی کنیم. هزینهی

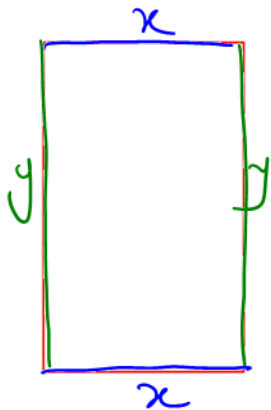
هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۳ میلیون تومان و هزینهی هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۴ میلیون تومان است. اگر ابعاد این زمین را چنان در نظر بگیریم که هزینهی دیوارکشی مینیمم شود، محیط آن برابر چقدر است؟

۸۰ (۴)

۷۶ (۳)

۷۴ (۲)

۷۰ (۱) ✓



$$(2x) \times 3 + (2y) \times 4$$

$$2y = 300 \rightarrow y = \frac{300}{2}$$

$$4x + 1x \frac{300}{x} = 4 \left(x + \frac{300}{x} \right) \quad \text{هزینه}$$

$$P' = 0 \rightarrow 1 - \frac{300}{x^2} = 0 \rightarrow x = 15$$

$$15 \times 10 \rightarrow P = 2(15 + 10) = 70$$

۶۷

۴۸- هزینه‌ی سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت برابر $20v^2$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت صرف نظر از سرعت قطار، برابر ۵۰۰۰۰ تومان است. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه‌ی آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن گردد؟

۶۰ (۴)

۵۵ (۳)

۵۰ (۲)

۴۰ (۱)

$$\text{هزینه حرکت} = 50000 + 20v^2$$

$$\text{هزینه کل} = \frac{50000 + 20v^2}{v}$$

$$= \frac{50000}{v} + 20v$$

$$C'(v) = -\frac{50000}{v^2} + 20 = 0$$

$$v^2 = 2500 \rightarrow v = 50$$

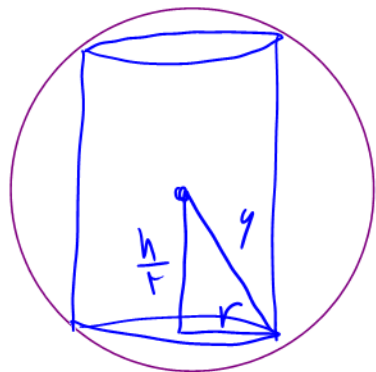
۴۹- محیط هر دو قاعده‌ی استوانه‌ای روی سطح کره‌ای به شعاع ۶ واقع‌اند. اگر حجم استوانه ماکسیمم باشد، ارتفاع استوانه کدام است؟

$$2\sqrt{6} \quad (۴)$$

$$4\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$6\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$۸ \quad (۱)$$



$$\frac{h^2}{\varepsilon} + r^2 = 36$$

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(36 - \frac{h^2}{\varepsilon}\right) h = \pi \left(36h - \frac{h^3}{\varepsilon}\right)$$

$$V' = 0 \rightarrow 36 - \frac{3h^2}{\varepsilon} = 0 \rightarrow h^2 = \varepsilon ۱۲$$

$$h = \varepsilon \sqrt{۳}$$

۵۰- دو نقطه $A(1,5)$ و $B(1,14)$ و نقطه M روی خط $y=2$ مفروض اند. اگر زاویه $\angle AMB$

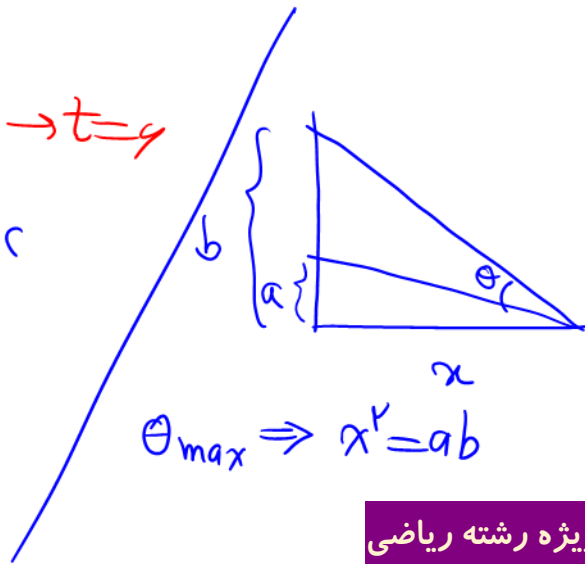
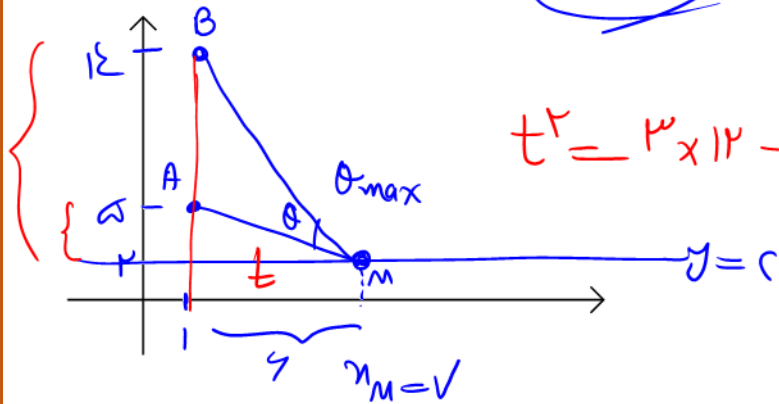
ماکسیمم شود، طول نقطه M کدام می تواند باشد؟

۱ (۴)

۷ (۳)

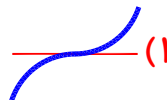
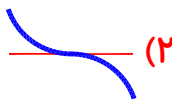
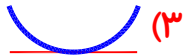
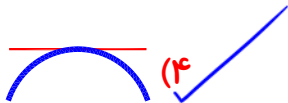
۶ (۲)

۵ (۱)

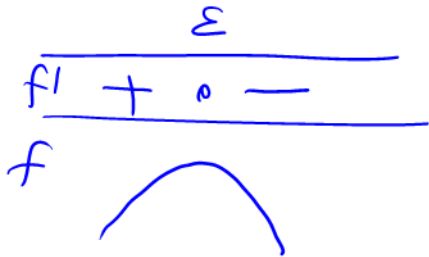


۷۰

۵۱- کدام شکل، بخشی از نمودار تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$ است؟

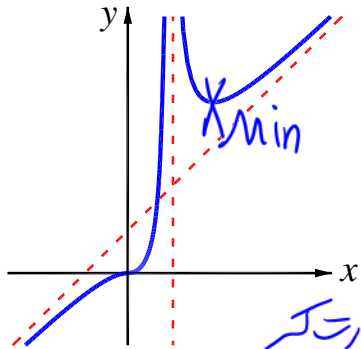


$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+4) - \sqrt{x}}{(x+4)^2} = \frac{\frac{4-x}{2\sqrt{x}}}{(x+4)^2}$$



۵۲- شکل زیر، نمودار تابع $y = \frac{x^3 + ax^2}{x^2 + bx + 1}$ است. مقدار مینیمم نسبی تابع، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۷)



۶ (۲)

۴/۵ (۱)

۶/۷۵ (۴) ✓

۶/۲۵ (۳)

Δ
 $\rightarrow x^2 + bx + 1 = (x-1)^2$
 $+ \omega \omega$

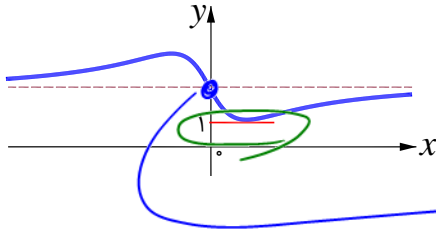
$x^3 + ax^2 = 0 \rightarrow x^2(x+a) = 0$

$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x=-a \end{array} \right.$	$\xrightarrow{\text{de}} a=0$
	$a=0$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \quad f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-1)(3x-2-2x)}{(x-1)^4}$$

۷۲ $f' = 0 \rightarrow x = 0, 3 \rightarrow \text{Min} \mid y = ? \quad y = f(3) = \frac{27}{4}$

۵۳- شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{ax^2 + bx + 6}{x^2 + 2}$ است. مقدار b کدام است؟



$$-2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$-4\sqrt{2} \quad (4)$$

$$4\sqrt{2} \quad (3)$$

$$f(0) = y \text{ عند } x=0 \rightarrow \frac{6}{2} = \frac{ax^2}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 6}{x^2 + 2}$$

$$a = 3$$

موقع $y=1$ ← $ax^2 + bx + 6 = x^2 + 2$

(+)

$$\frac{ax^2 + bx + 6}{x^2 + 2} = 1 \Rightarrow ax^2 + bx + 6 = x^2 + 2$$

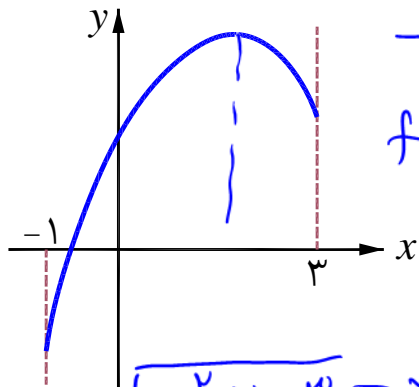
$$b = -2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + 1 = 0 \rightarrow (x - \sqrt{2})^2 \rightarrow \frac{b}{a} = -2\sqrt{2}$$

۷۳

۵۴- شکل زیر، نمودار تابع $y = x + \sqrt{-x^2 + ax + b}$ است، مقدار ماکسیمم مطلق تابع کدام است؟

(سراسری ریاضی فارج ۹۷)



داده

$$\rightarrow (x+1)(3-x) \geq 0$$

$$f(x) = x + \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

$$y' = 1 + \frac{-2x+2}{2\sqrt{\quad}} = 0 \rightarrow 1 = \frac{x-1}{\sqrt{\quad}}$$

$$\rightarrow \sqrt{-x^2 + 2x + 3} = x - 1 \xrightarrow{x \geq 1} -x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$$

$$f(x) = x + \sqrt{4 - (x-1)^2} \rightarrow f(1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$1 + \sqrt{2} \quad (1)$$

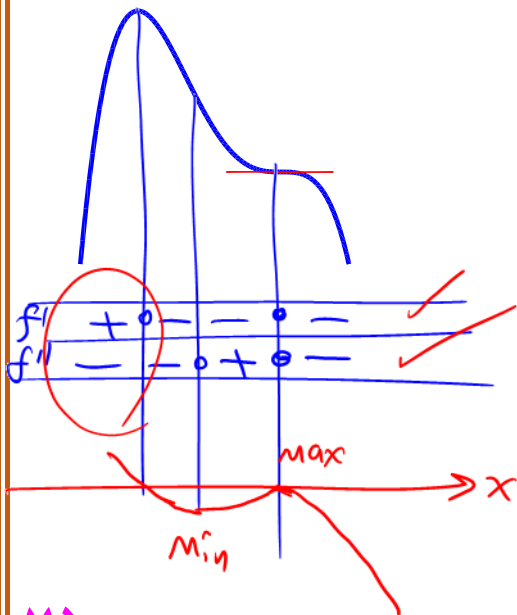
$$4 \quad (4)$$

$$1 + 2\sqrt{2} \quad (3)$$



۷۴

۵۵- شکل مقابل نمودار تابع f است، مقادیر اکستریم نسبی تابع مشتق f از راست به چپ چگونه است؟



(۱) مینیمم مثبت ، ماکسیمم مثبت

(۲) مینیمم منفی ، ماکسیمم منفی

(۳) مینیمم صفر ، ماکسیمم مثبت

(۴) مینیمم منفی ، ماکسیمم صفر

۵۶- برای هر m از بازه (a, b) ، تفرع منحنی $y = x^4 + mx^3 + (m+2)x^2$ همواره رو به بالا است.

بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

$$\frac{13}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{14}{3} \quad (۳)$$

$$۵ \quad (۲)$$

$$\frac{16}{3} \quad (۱)$$

$$y'' > 0 \rightarrow 12x^2 + 6mx + 2(m+2) > 0$$

$$6x^2 + 3mx + (m+2) > 0$$

$$9 > 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow 9m^2 - 24(m+2) < 0$$

$$3m^2 - 8m - 16 < 0$$

۷۶

$$-\frac{8}{3} < m < 4$$

۵۷- فاصله دو نقطه عطف نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x^2 + 3}$ ، کدام است؟ (سراسری تیرمی دافل ۹۹)

۳ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

$$y' = \frac{3 - (-4)}{(x^2 + 3)^2} \cdot 2x = 11 \cdot \frac{x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y'' = 11 \cdot \frac{(x^2 + 3)^2 - 2(x^2 + 3)(2x)x}{(x^2 + 3)^4} = \frac{(x^2 + 3)(x^2 + 3 - 4x^2)}{(x^2 + 3)^4}$$

$$y'' = \frac{3(1 - x^2)}{(3 + x^2)^3} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1, -\frac{5}{8}) \\ B(-1, -\frac{5}{8}) \end{array} \right\}$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 0} = 2$$

۵۸- نمودار تابع $y = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$ ، در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟

(سراسری تیرگی ۹۷)

(۲) $(0, 1)$

(۱) $(-2, 1)$

(۴) $(-\infty, -2)$

(۳) $(-2, 0)$ ✓

$$y' < 0 \quad \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} < 0$$

$$\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1) < 0$$

$$y'' < 0 \quad \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}} < 0$$

$$\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}(x+2) < 0$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}} < 0 \rightarrow x < 1$$

$$\cap \rightarrow -2 < x < 0$$

$$\frac{x+2}{\sqrt{x}} < 0 \rightarrow -2 < x < 0$$

۷۸ \sqrt{x}

ویژه رشته ریاضی

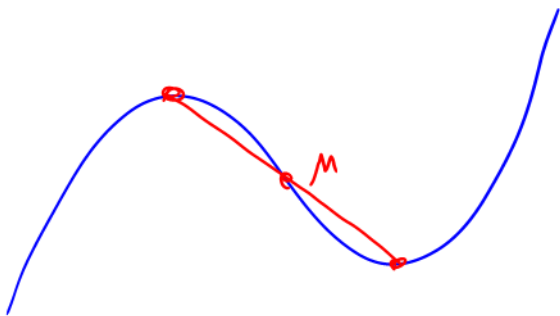
۵۹- خط گذرنده از نقاط ماکسیمم و مینیمم تابع $y = 6x^2 - x^3 + x + 1$ ، نمودار منحنی این تابع را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱۶ (۴)

۱۷ (۳)

۱۸ (۲)

۱۹ (۱) ✓



$$y'' = 0 \rightarrow 12 - 6x = 0$$

$$x = 2 \rightarrow y_M = 19$$

$$M(2, 19)$$

۶۰- با توجه به نمودار تابع $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12x$ ، به ازای کدام مقادیر m خط به معادله‌ی

$y = m$ مفروض فقط در دو نقطه مشترک است؟

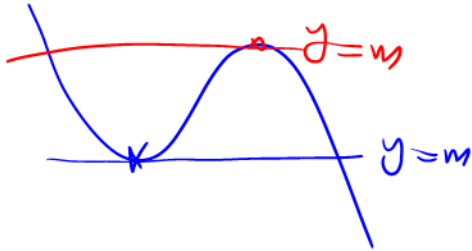
(سراسری تهرانی فارج ۹۷)

$$-\frac{16}{3}, 27 \quad (۴)$$

$$-\frac{16}{3}, 24 \quad (۳)$$

$$-\frac{44}{3}, 24 \quad (۲)$$

$$-\frac{44}{3}, 27 \quad (۱) \quad \checkmark$$



$$y' = -2x^2 + 2x + 12 = 0 \rightarrow x = -1, 3$$

$$\left. \begin{array}{l} A(-1, -\frac{24}{3}) \\ B(3, 27) \end{array} \right\}$$