



کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل پانزدهم : آمار

مهرداد عباسپور

تعاریف :

آمار : مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار : مجموعه‌ی روش‌هایی است که در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی

انجام می‌شود. شامل :

- (۱) جمع‌آوری اعداد و ارقام
- (۲) سازماندهی و نمایش داده‌ها
- (۳) تحلیل و تفسیر داده‌ها
- (۴) قضاوت و پیش‌بینی مناسب

جامعه (جمعیت) : مجموعه‌ی تمام افراد یا اشیایی که درباره‌ی یک یا چند

ویژگی آن تحقیق صورت می‌گیرد.

نمونه : بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب می‌شود.

اندازه یا حجم جامعه (نمونه) : تعداد اعضای جامعه (نمونه)

سرشماری : به دست آوردن آمار همه‌ی اعضای جامعه



انواع متغیرها :

متغیرهای کمی : متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری هستند.

متغیر پیوسته : متغیری که اگر دو مقدار را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند. مثال : وزن افراد

متغیر گسسته : متغیر کمی که پیوسته نباشد. مثال : تعداد فرزندان

متغیرهای کیفی : متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند.

متغیر ترتیبی : متغیری که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. مثال : مراحل تحصیل

متغیر اسمی : متغیر کیفی که ترتیبی نیست. مثال : گروه خونی

میانگین

(۱) برای اعداد $x_1, \dots, x_2, \dots, x_n$ عدد $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ را میانگین می‌نامیم.

(۲) اگر یک داده‌ی آماری حذف یا اضافه شود، هر چه مقدار آن دورتر از میانگین باشد، تأثیر بیشتری بر میانگین می‌گذارد.

به خصوص اگر عدد حذف یا اضافه شده برابر میانگین باشد، میانگین تغییر نمی‌کند.

(۳) هرگاه دو گروه از داده‌های آماری با میانگین‌های برابر را با هم ترکیب کنیم، میانگین تغییر نمی‌کند.

هرگاه از داده‌های آماری تعدادی را حذف کنیم که میانگین آنها برابر میانگین داده‌های اصلی باشد، در اثر حذف این داده‌ها میانگین تغییر نمی‌کند.

(۴) همواره، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است.

میان و چارک‌ها

(۱) فرض کنید داده‌های آماری را از کوچک به بزرگ مرتب کرده‌ایم. در این صورت :

اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میان عدد وسط است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میان را

میانگین دو عدد وسط می‌گیریم. میان را با Q_2 نشان می‌دهیم و آن را چارک دوم می‌نامیم.

(۲) میانه‌ی داده‌های قبل از Q_2 را چارک اول می‌نامیم و با Q_1 نشان می‌دهیم.

(۳) میانه‌ی داده‌های بعد از Q_2 را چارک سوم می‌نامیم و با Q_3 نشان می‌دهیم.



(۴) این که چارک‌ها، عضوی از داده‌ها هستند یا نیستند، بستگی به باقی‌مانده‌ی تقسیم تعداد آن‌ها بر ۴ دارد.

(۵) میانگین داده‌ها تحت تأثیر داده‌های خیلی بزرگ یا خیلی کوچک (داده‌های دور افتاده)، قرار می‌گیرد. در صورتی که میانه‌ی داده‌ها تحت تأثیر داده‌های دورافتاده قرار نمی‌گیرد.

بنابراین در صورت وجود داده‌ی دورافتاده از میانه استفاده می‌کنیم.

مثال : برای ۱۸ داده‌ی آماری که چارک اول، دوم و سوم به ترتیب برابر ۳، ۶ و ۱۳ است، میانگین داده‌های کمتر از چارک اول برابر ۲، میانگین داده‌های بین چارک اول و سوم برابر ۷ و میانگین داده‌های بعد از چارک سوم برابر a است. اگر میانگین کل داده‌ها برابر ۱۰ باشد، مقدار a را بیابید.

واریانس ، انحراف معیار ، ضریب تغییرات

(۱) برای اعداد x_1, x_2, \dots, x_n با میانگین \bar{x} ، عدد زیر را واریانس می‌نامیم :

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

(۲) جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامیم (σ).

(۳) نسبت انحراف معیار به میانگین ($cv = \frac{\sigma}{\bar{x}}$) را ضریب تغییرات می‌نامیم.

(۴) واحد انحراف معیار همان واحد داده‌هاست ولی ضریب تغییرات واحد ندارد و معمولاً به صورت درصد بیان می‌شود.

(۵) واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات فقط وقتی برابر صفر می‌شوند که داده‌های آماری برابر باشند.

(۶) دامنه‌ی تغییرات : تفاضل بزرگترین و کوچک‌ترین داده‌ها

(۷) اشکال دامنه‌ی تغییرات این است که فقط دو داده در آن تأثیر دارند.

(۸) برای مقایسه‌ی پراکندگی داده‌ها در دو جامعه از ضریب تغییرات استفاده می‌کنیم.



میانگین و انحراف معیار جملات دنباله‌ی حسابی

اگر داده‌های آماری x_1, x_2, \dots, x_n که جملات متوالی دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت d هستند :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2}$$

$$\sigma = |d| \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$$

واریانس ترکیب دو گروه از داده‌ها با میانگین برابر

مثال : ۸ داده‌ی آماری با میانگین ۶ و انحراف معیار ۲ داریم. ۱۲ داده‌ی آماری دیگر با میانگین ۶ و انحراف معیار ۳ مفروض است. واریانس همه‌ی این داده‌ها را بیابید.

تغییر خطی داده‌ها

اگر از روی داده‌های x_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ ، داده‌های y_i ساخته شوند،
آنگاه :

$$y_i = ax_i + b \Rightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b , \sigma_y = |a|\sigma_x$$

۱- نوع متغیرهای تصادفی « شاخص توده‌ی بدن » و « رنگ چشم افراد » به ترتیب کدام است ؟

- (۱) کمی پیوسته ، کیفی ترتیبی (۲) کمی پیوسته ، کیفی اسمی
(۳) کمی گسسته ، کیفی ترتیبی (۴) کمی گسسته ، کیفی اسمی

۲- از داده‌های « ۱ ، ۱۴ ، ۱۵ ، ۱۷ ، ۱۹ ، ۲۰ » یکی از داده‌ها را حذف می‌کنیم تا میانگین کمترین تغییر را داشته باشد. میانگین داده‌های جدید کدام است ؟

- (۱) ۱۴/۴ (۲) ۱۴/۶ (۳) ۱۴/۸ (۴) ۱۵

۳- اگر میانگین ۹ عدد « ۲۰ ، ۹ ، ۱۸ ، ۱۶ ، ۱۱ ، ۱۴ ، ۱۰ ، ۷ ، a » برابر ۱۳ باشد، میانه‌ی آنها کدام است ؟
(سراسری تبریز خارج ۹۷)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴



۴- برای ۱۹ داده‌ی آماری، میانگین داده‌های بیشتر از چارک سوم $۱۷/۵$ ، میانگین داده‌های کمتر از چارک اول برابر ۱۱ و میانگین بقیه‌ی داده‌ها برابر $۱۵/۲$ است. میانگین این ۱۹ داده کدام است؟

(سراسری ریاضی فارغ ۹۷)

(۲) $۱۴/۸$

(۱) $۱۴/۷$

(۴) $۱۵/۱$

(۳) $۱۴/۹$

۵- میزان بارندگی یک استان در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است. ضریب تغییرات داده‌های بین چارک اول و سوم کدام است؟

(سراسری ریاضی فارغ ۹۸)

۲۲ ، ۵۷ ، ۴۲ ، ۳۷ ، ۵۴ ، ۵۰ ، ۴۶ ، ۵۶ ، ۳۹ ، ۵۹

(۴) $۰/۱۵$

(۳) $۰/۱۲$

(۲) $۰/۰۹$

(۱) $۰/۰۷$

۶- ضریب تغییرات ۷ عدد طبیعی متوالی، $۰/۱$ است. بزرگترین این اعداد کدام است؟

(۴) ۲۴

(۳) ۲۳

(۲) ۲۲

(۱) ۲۱

۷- اگر میانگین داده‌های « d, c, b, a » برابر ۶ و واریانس آنها برابر صفر باشد، میانگین داده‌های « $c + d, a + b, d, c, b, a$ » کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۱۰

۸- در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند، میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟

(سراسری تهرانی ۹۸)

(۲) گروه دوم

(۱) گروه اول

(۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد.

(۳) یکسان

۹- یک جامعه با اندازه‌ی ۱۲ و واریانس $۱۲/۶$ ، با جامعه‌ی دیگری به اندازه‌ی ۲۴ و واریانس $۷/۲$ ، تشکیل جامعه‌ی جدیدی داده‌اند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف معیار جامعه جدید، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۶)

(۴) $۳/۲$

(۳) $۳/۱$

(۲) ۳

(۱) $۲/۹$

۱۰- میانگین و انحراف معیار ۷ داده آماری به ترتیب ۴۰ و ۲ می‌باشد. اگر داده‌های « ۳۴ ، ۴۱ ، ۴۵ » به آنان افزوده شود، ضریب تغییرات ۱۰ داده جدید چند درصد است؟

(۴) $۷/۵$

(۳) ۷

(۲) $۶/۵$

(۱) ۶



۱۱- اگر ۲۰ داده‌ی آماری را دو برابر کرده و سپس ۷ واحد از هر کدام کم کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید، $1/5$ برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود. مجموع داده‌های قبلی کدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۶)

۲۱۰ (۱) ۲۸۰ (۲) ۳۵۰ (۳) ۴۲۰ (۴)

۱۲- اگر ضریب تغییرات داده‌های « $3x_1 + 1, 3x_2 + 1, \dots, 3x_n + 1$ » برابر 0.09 و ضریب تغییرات داده‌های « $4x_1 - 2, 4x_2 - 2, \dots, 4x_n - 2$ » برابر 0.12 باشد، ضریب تغییرات داده‌های « x_1, x_2, \dots, x_n » برابر کدام است؟

۰/۱ (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۳ (۳) ۰/۴ (۴)

آزمون :

۱۳- نوع متغیرهای تصادفی «وزن افراد» و «مقطع تحصیلی افراد» به ترتیب کدام است؟

(۱) کمی پیوسته ، کیفی ترتیبی (۲) کمی پیوسته ، کیفی اسمی
(۳) کمی گسسته ، کیفی ترتیبی (۴) کمی گسسته ، کیفی اسمی

۱۴- از داده‌های « $6, 11, 8, 5, 9, 7$ » یکی از داده‌ها را حذف می‌کنیم. میانگین k واحد کاهش می‌یابد. کمترین مقدار k کدام است؟

$\frac{1}{9}$ (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{15}$ (۳) $\frac{1}{18}$ (۴)

۱۵- اگر میانگین و میانه‌ی اعداد مثبت « $1, 3, 5, 7, a$ » برابر باشند، مجموع مقادیر a کدام است؟

۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

۱۶- برای ۲۷ داده‌ی آماری، میانگین داده‌های قبل از چارک اول برابر ۷، میانگین داده‌های بعد از چارک سوم برابر ۳۰ و میانگین بقیه‌ی داده‌ها برابر a است. اگر میانگین کل داده‌ها برابر ۲۰ باشد، مقدار a کدام است؟

۲۱ (۱) $21/2$ (۲) $21/4$ (۳) $21/6$ (۴)

۱۷- اگر عدد a میانه‌ی اعداد صحیح و متمایز « $6, 14, 13, 10, 12, 8, 4, 3, a$ » باشد، مقدار تقریبی ضریب تغییرات داده‌های بین چارک اول و سوم، چند درصد است؟

۱۸ (۱) ۲۰ (۲) ۲۲ (۳) ۲۴ (۴)



۱۸- برای اعداد طبیعی متوالی « ۲۶ ، ۲۵ ، ... ، ۱۵ ، ۱۴ » ضریب تغییرات داده‌های بین چارک اول و سوم کدام است ؟

- (۱) ۰/۱ (۲) ۰/۱۲ (۳) ۰/۱۴ (۴) ۰/۲

۱۹- نمرات مهارت برای کارگر A : « ۱۶ ، ۱۵ ، ۱۴ ، ۱۳ ، ۱۲ » و برای کارگر B : « ۱۶/۵ ، ۱۶ ، ۱۵/۵ ، ۱۳ ، ۱۱/۵ » بوده است. دقت عمل کدام بیشتر است ؟ (سراسری تهرنی فارغ ۹۸)

- (۱) A (۲) B

(۳) یکسان (۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد.

۲۰- دو گروه داده‌ی آماری را با هم ترکیب می‌کنیم. گروه اول ۸ داده با میانگین ۱۵ و ضریب تغییرات ۰/۲ و گروه دوم ۱۲ داده با میانگین ۱۵ و ضریب تغییرات ۰/۴ هستند. واریانس این ۲۰ داده‌ی آماری کدام است ؟

- (۱) ۲۴/۸ (۲) ۲۵ (۳) ۲۵/۲ (۴) ۲۵/۴

۲۱- میانگین ۲۴ داده‌ی آماری برابر ۱۰ و واریانس برابر ۲۱ است. اگر داده‌های « ۹ ، ۹ ، ۱۱ ، ۱۱ » از این گروه حذف شوند، ضریب تغییرات ۲۰ داده‌ی باقی‌مانده چند درصد است ؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۵۰ (۴) ۵۴

۲۲- انحراف معیار ۲۶ داده‌ی آماری برابر ۲ می‌باشد. اگر یکی از داده‌ها که با میانگین برابر است از بین آنان حذف شود، واریانس ۲۵ داده‌ی دیگر کدام است ؟ (سراسری ریاضی فارغ ۸۷)

- (۱) ۳/۹۶ (۲) ۴/۰۸ (۳) ۴/۱۲ (۴) ۴/۱۶

۲۳- اگر ضریب تغییرات داده‌های « $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_n - 1$ » دو برابر ضریب تغییرات داده‌های « $3x_1 + 1, 3x_2 + 1, \dots, 3x_n + 1$ » باشد، حاصل $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ کدام است ؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۵۰ (۳) ۴۰ (۴) ۳۰

۲۴- بیست داده‌ی آماری داریم. هر یک را سه برابر کرده و حاصل را k واحد اضافه می‌کنیم. ضریب تغییرات داده‌های جدید، نصف ضریب تغییرات داده‌های ابتدایی است. میانگین داده‌های جدید چند برابر میانگین داده‌های اصلی است ؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) بستگی به k دارد.