



کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل شانزدهم : شمارش بدون شمردن

مهرداد عباسپور

سوالاتی از اصل جمع و ضرب و جایگشت

مثال : با حروف « g, f, e, d, c, b, a » چند کلمه ی ۷ حرفی می توان ساخت که :

(الف) قطعه « de » در آن دیده شود ؟ (ب) حروف « c, b, a » کنار هم باشند ؟

مثال : با ارقام « $۴, ۳, ۲, ۱, ۰$ » چند عدد سه رقمی زوج می توان ساخت که در آن حتماً

« ۳ » به کار رفته باشد ؟ (با تکرار و بی تکرار)

مثال : تعداد روش هایی که ۶ نفر دور یک میز گرد می توانند بنشینند ؟

مثال : به چند روش ۷ نفر می توانند در یک صف بایستند هر گاه قرار باشد، a جلوتر از b

باشد ؟

مثال : مجموعه های $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را در نظر بگیرید. چند تابع f از A

به B می توان تعریف کرد که $f(1) + f(2) = 5$ باشد ؟



جایگشت اشیاء تکراری

فرض کنید n شیء داریم که در بین آنها اشیاء تکراری :
 k تا « a »، m تا « b »، ... ، p تا « c » هستند.

در این صورت تعداد جایگشت‌های متمایز این n شیء برابر است با :

$$\frac{n!}{k! \times m! \times \dots \times p!}$$

(۱) توجه کنید که اگر از همه اشیاء استفاده نشود باید حالت بندی کنیم.

(۲) برای n شیء :

«تعداد جایگشت‌های $n-1$ تایی» = «تعداد جایگشت‌های n تایی»

مثال : تعداد جایگشت‌های n تایی با حروف « d, c, b, a, a, a » برای حالت‌های

$$n = 4, 5, 6$$

ترکیب

تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با :

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} ; (0 \leq r \leq n)$$

مثال : به چند روش می‌توان از بین ۴ کتاب ریاضی و ۶ کتاب فیزیک، یک بسته با ۵ کتاب

شامل دست کم ۳ کتاب ریاضی تشکیل داد ؟

مثال : چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز شامل دو رقم فرد و دو رقم زوج می‌توان

ساخت ؟

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد :

(۱) تعداد کل زیرمجموعه‌های A برابر 2^n است.

(۲) تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی A برابر $\binom{n}{k}$ است.



مثال : مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ چند زیرمجموعه دارد که حداکثر دو عضو زوج داشته باشد ؟

روابط بین ترکیب و جایگشت

$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	$C(n, r) = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$	$P(n, r) = r! \times C(n, r)$
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$	$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$	$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$
$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$	$\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Rightarrow a = b$ یا $a + b = n$	
$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$	$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$	

در ترکیب $\binom{n}{r}$ ، هر چه r به $\frac{n}{2}$ نزدیک تر باشد، مقدار بیشتری دارد. مثلاً :

$\binom{5}{0} = 1$ ، $\binom{5}{1} = 5$ ، $\binom{5}{2} = 10$ ، $\binom{5}{3} = 10$ ، $\binom{5}{4} = 5$ ، $\binom{5}{5} = 1$
 $\binom{6}{0} = 1$ ، $\binom{6}{1} = 6$ ، $\binom{6}{2} = 15$ ، $\binom{6}{3} = 20$ ، $\binom{6}{4} = 15$ ، $\binom{6}{5} = 6$ ، $\binom{6}{6} = 1$

۱- به چند روش می‌توان رئوس مربع $ABCD$ را با سه رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که رئوسی که در یک ضلع مشترک هستند، هم‌رنگ نباشند ؟

- ۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۲- چند عدد سه رقمی زوج بزرگتر از ۴۰۰ می‌توان با ارقام متمایز « ۰ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ » نوشت ؟

- ۱) ۳۶ ۲) ۴۰ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

۳- تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیر تکراری، کدام است ؟

(سراسری ریاضی ۹۹)

- ۱) ۹۴۸ ۲) ۹۵۲
۳) ۹۶۸ ۴) ۹۷۲

۴- چند عدد سه رقمی وجود دارد که بزرگترین رقم استفاده شده در آن ۵ باشد ؟

- ۱) ۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۰



۵- چهار کتاب ریاضی متفاوت و دو کتاب فیزیک متفاوت داریم. به چند طریق می توانیم یک ردیف ۵ تایی از این کتاب ها ایجاد کنیم به طوری که دو کتاب فیزیک کنار هم نباشند؟

- ۴۸۰ (۱) ۵۲۸ (۲) ۶۰۰ (۳) ۶۲۴ (۴)

۶- به چند حالت ۴ نفر می توانند در یک صف بایستند، هرگاه قرار باشد A جلوتر از B باشد؟

- ۵ (۱) ۱۲ (۲) ۲۰ (۳) ۳۰ (۴)

۷- با حروف « c, b, b, a, a, a » چند کلمه ی ۶ حرفی می توان ساخت با a شروع شود؟

- ۳۰ (۱) ۴۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴)

۸- چند کلمه ی ۳ حرفی با حروف « e, d, c, b, a, a » می توان ساخت؟

- ۶۰ (۱) ۶۴ (۲) ۶۸ (۳) ۷۲ (۴)

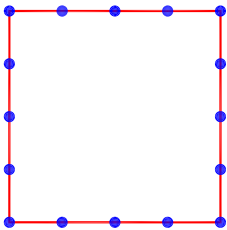
۹- از بین ۵ دانش آموز تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی، به چند طریق می توان سه نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد؛ به طوری که لااقل دو نفر از آنها دانش آموز تجربی باشند؟

(سراسری ۹۰)

- ۲۵ (۱) ۳۰ (۲)

- ۳۵ (۳) ۴۰ (۴)

۱۰- چند مثلث وجود دارد که رئوس آن از بین نقاط نشان داده شده در شکل باشد؟



- ۵۰۰ (۱) ۵۱۰ (۲)

- ۵۲۰ (۳) ۵۳۰ (۴)

۱۱- از هر ۵ مدرسه نمونه، ۴ نفر در اردویی شرکت دارند. به چند طریق می توان از بین آنان

۳ نفر انتخاب کرد. به طوری که هیچ دو نفر انتخاب شده، از یک مدرسه نباشند؟

(سراسری تهری خارج ۹۸)

- ۱۳۵ (۱) ۲۷۰ (۲)

- ۳۲۰ (۳) ۶۴۰ (۴)

۱۲- به چند طریق می توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری

(سراسری تهری ۹۹)

که ۲ نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

- ۸۴ (۱) ۷۲ (۲) ۹۱ (۳) ۹۵ (۴)



۱۳- چهار مهره سفید متمایز و سه مهره قرمز یکسان داریم. به چند روش می توان تمام این مهره ها را در یک ردیف قرار دهیم هرگاه قرار باشد هیچ دو مهره ی قرمزی کنار هم نباشند؟

۲۴۰ (۱) ۴۸۰ (۲) ۹۶۰ (۳) ۱۴۴۰ (۴)

۱۴- به چند طریق می توان به ۴ سوال از ۶ سوال تستی دو گزینه ای «بله ، خیر» پاسخ گفت در صورتی که پاسخ به حداقل ۲ سوال از ۳ سوال اول اجباری باشد؟

۱۴۴ (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۶ (۳) ۱۹۲ (۴)

۱۵- اگر A مجموعه ی اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۳ باشد، چند زیر مجموعه از A شامل حداکثر ۲ رقم زوج و حداقل یک رقم فرد است؟

۲۳۵۶ (۱) ۲۴۶۸ (۲) ۲۷۹۴ (۳) ۲۸۴۲ (۴)

۱۶- چند تابع f از مجموعه ی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه ی $B = \{1, 2, 3, 4\}$ وجود دارد که $f(1) \neq f(2)$ و $f(3) \neq 4$ باشد؟

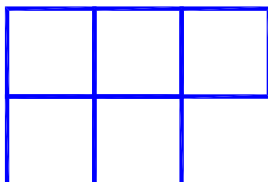
۱۴۴ (۱) ۱۶۲ (۲) ۱۸۰ (۳) ۱۹۲ (۴)

۱۷- مجموعه ی A دارای $2k$ زیرمجموعه ی دو عضوی و $12k$ زیرمجموعه ی سه عضوی است. مقدار k کدام است؟

۱۳۸ (۱) ۹۵ (۲) ۶۰ (۳) ۳۳ (۴)

آزمون :

۱۸- هر یک از مربع های شکل روبه رو را می خواهیم با یکی از سه رنگ قرمز، آبی و سبز رنگ آمیزی کنیم. این کار به چند صورت امکان پذیر است هرگاه قرار باشد هر دو مربعی که در یک ضلع مشترکند رنگ متفاوتی داشته باشند؟



۲۴ (۱) ۳۶ (۲)

۴۸ (۳) ۶۰ (۴)

۱۹- چند عدد زوج چهار رقمی با ارقام «۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵» بدون تکرار ارقام می توان نوشت که در آن از «۴» استفاده شده باشد؟

۱۰۸ (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۱۲ (۳) ۱۱۴ (۴)



۲۰- تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام غیر تکراری که شامل رقم ۵ باشند، کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج ۹۹)

۱۸۴۸ (۱) ۱۷۹۲ (۲)

۱۷۴۸ (۳) ۱۶۵۸ (۴)

۲۱- با ارقام « ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱ ، ۰ » چند عدد چهار رقمی با شرط

« رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان » و بدون رقم تکراری می توان ساخت ؟

۴۰ (۱) ۵۰ (۲) ۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

۲۲- تعداد اعداد سه رقمی که حداقل یک رقم ۵ و حداقل یک رقم ۲ را شامل شود، کدام

(سراسری ریاضی خارج ۹۱) است ؟

۵۲ (۱) ۵۴ (۲) ۵۶ (۳) ۵۸ (۴)

۲۳- در چند تا از جایگشت های ساخته شده با حروف « f, e, d, c, b, a » قطعه ای « ab »

« وجود دارد و حروف « d, c » کنار هم نیستند ؟

۷۲ (۱) ۹۶ (۲) ۱۹۲ (۳) ۲۱۶ (۴)

۲۴- چهار کتاب ریاضی متفاوت و سه کتاب فیزیک متفاوت را به چند طریق می توان یک

در میان در یک قفسه چید ؟

۳۵ (۱) ۱۴۰ (۲) ۱۴۴ (۳) ۲۸۸ (۴)

۲۵- به چند طریق ۸ نفر دور یک میز گرد بنشینند هرگاه قرار باشد a و b روبه روی هم و

همچنین c و d روبه روی هم باشند ؟

۶۰ (۱) ۷۲ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۴۴ (۴)

۲۶- تعداد جایگشت های حروف کلمه « $SYSTEM$ » به طوری که S ها کنار هم نباشند

(سراسری تهرانی خارج ۹۲) کدام است ؟

۱۲۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

۲۷- با ارقام « ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۳ ، ۳ ، ۲ ، ۱ » چند عدد زوج شش رقمی می توان نوشت ؟

۱۲۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۰۰ (۴)

۲۸- تعداد جایگشت های متفاوت از حروف « e, d, c, b, b, a, a, a » به طوری که هیچ

دو حرف a کنار هم نباشند کدام است ؟

۱۲۰۰ (۱) ۱۶۸۰ (۲) ۱۸۰۰ (۳) ۲۴۰۰ (۴)



۳۹- گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق می‌تواند دسته‌گل‌های متمایز درست

کند، به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف موجود باشد؟ (سراسری تهرانی ۹۱)

۱۲۶ (۱) ۱۴۰ (۲) ۱۵۴ (۳) ۱۶۸ (۴)

۳۰- یک ۱۲ ضلعی منتظم داریم. چند چهارضلعی وجود دارد که رئوس آن از بین رئوس

این ۱۲ ضلعی انتخاب شود و دقیقاً یک ضلع مشترک با آن داشته باشد؟

۳۳۶ (۱) ۴۳۲ (۲) ۴۹۵ (۳) ۵۴۰ (۴)

۳۱- از هر یک از مدارس «A, B, C, D, E» چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده-

اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دوبه‌دو غیر هم مدرسه باشند انتخاب کرد؟

۱۶۰ (۱) ۳۲۰ (۲) (سراسری ۹۲)

۴۸۰ (۴)

۳۲- در یک آپارتمان ۴ طبقه، در هر طبقه ۳ واحد آپارتمان و در هر آپارتمان ۲ نفر زندگی

می‌کنند. قرار است هر طبقه یک تیم دو نفره‌ی تنیس که اعضای آن از یک خانواده نباشند

معرفی کند. اگر بخواهیم یک بازی بین دو تیم از طبقات مختلف برگزار کنیم، به چند روش

امکان‌پذیر است؟

۵۴ (۱) ۱۰۸ (۲) ۴۳۲ (۳) ۸۶۴ (۴)

۳۳- با ارقام «۱، ۲، ...، ۹» به چند طریق می‌توان یک عدد پنج رقمی ساخت به

طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟ (سراسری ۹۴)

۶۴۰۰ (۱) ۷۲۰۰ (۲) ۸۴۰۰ (۳) ۹۶۰۰ (۴)

۳۴- چند مجموعه متفاوت از اعداد طبیعی یک رقمی می‌توان ساخت که هر کدام شامل

دست کم سه عدد اول باشند؟

۱۲۸ (۱) ۱۳۶ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۶۰ (۴)

۳۵- چند تابع f از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3\}$ به مجموعه‌ی $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ وجود دارد که

$|f(1) - f(2)| = 2$ باشد؟

۱۵ (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴)

۳۶- هرگاه $\binom{n}{3} + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{5}$ باشد، بیش‌ترین مقدار $\binom{n}{m}$ کدام است؟

۳۵ (۱) ۵۶ (۲) ۷۰ (۳) ۱۲۶ (۴)