

کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل هجدهم : هندسه

مهر داد عباسپور

انواع استدلال

استدلال استقرایی :

در این روش استدلال، با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود؛ یعنی از جزء به کل می‌رسیم. بدیهی است که استدلال استقرایی یک اثبات قابل قبول ریاضی نیست.

استدلال استنتاجی :

استدلالی است که بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه‌ی واقعیت‌هایی که درستی آن را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

عکس قضیه :

اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

برهان خلف :

در برهان خلف فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجه‌ی غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

قضیه دو شرطی :

هرگاه یک قضیه و عکس آن درست باشد، آن را یک قضیه دو شرطی می‌نامیم. قضیه‌های دو شرطی را با نماد \Leftrightarrow (که خوانده می‌شود اگر و تنها اگر) بیان کرد.

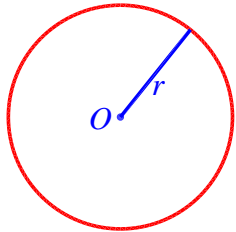
مثال نقض :

به مثالی که نشان دهد یک حکم کلی غلط است، مثال نقض گویند.

ترسیم‌های هندسی

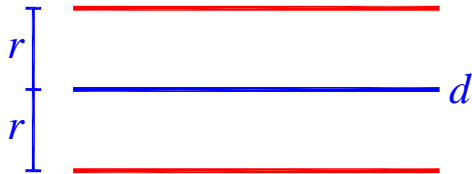
نقاط با فاصله r از نقطه O :

دایره به مرکز O و شعاع r



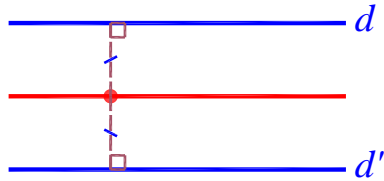
نقاط با فاصله r از خط d :

دو خط به موازات d و به فاصله r از آن



نقاطی که از دو خط موازی به یک فاصله‌اند :

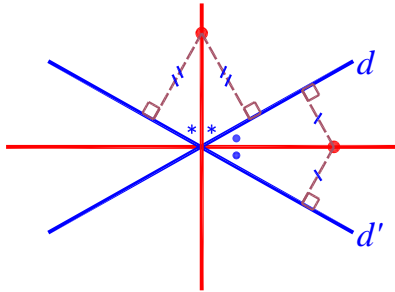
خط به موازات آنها و وسط آنها



نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند :

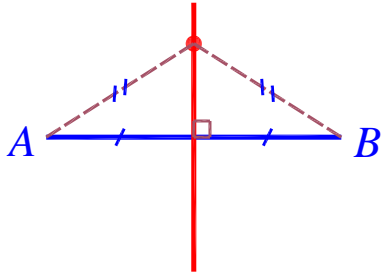
نیمسازهای زاویه‌های بین d و d' .

دقت کنید که این دو نیمساز بر هم عمودند.



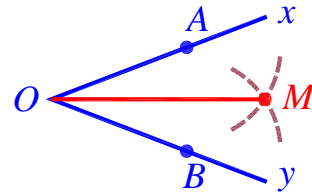
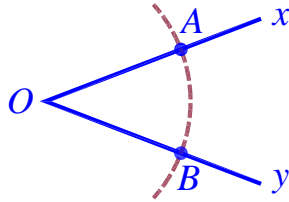
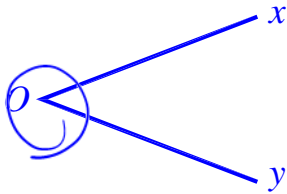
نقاطی که از دو سر پاره خط AB فاصله‌ی برابر دارند.

خط عمود منصف AB .



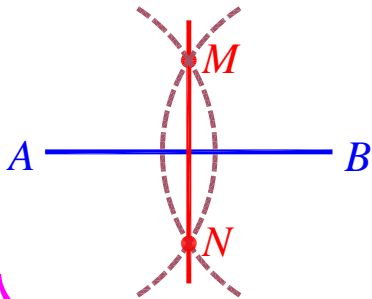
رسم نیمساز

(۱) دایره به مرکز O (۲) دو دایره به شعاع برابر به مرکز A و B (حداقل به اندازه‌ی نصف طول AB)

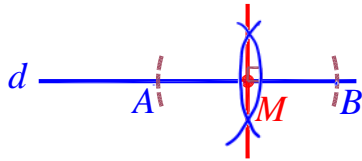


رسم عمود منصف

دو دایره به شعاع برابر (بزرگتر از نصف طول AB) به مرکز A و B .



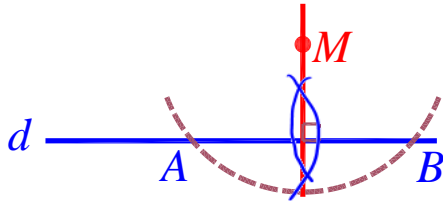
رسم عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن



(۱) دایره‌ای به مرکز M

(۲) عمود منصف AB

رسم عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن

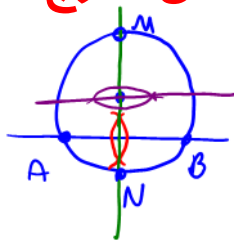
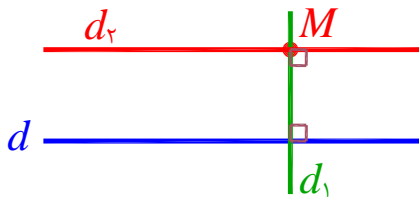


(۱) دایره‌ای به مرکز M که شعاع آن بیشتر از فاصله‌ی نقطه‌ی

M تا خط d باشد.

(۲) عمود منصف AB

رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن

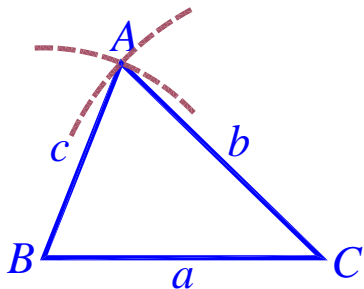


(۱) خط d_1 گذرا از M و عمود بر d

(۲) خط d_2 گذرا از M و عمود بر d_1

دایره هم‌انداختن است.

رسم مثلثی با معلوم بودن اندازه‌ی سه ضلع a ، b و c

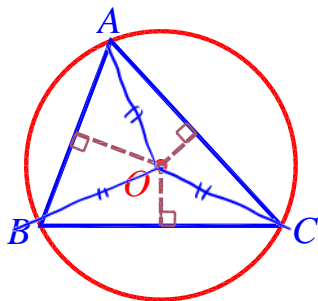


(۱) رسم پاره خط BC به طول a

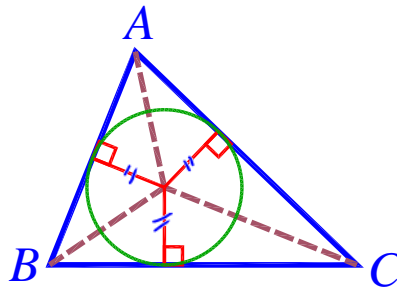
(۲) رسم دو دایره به مرکزهای B و C و شعاع‌های c و b

شرط وجود جواب : $|b - c| < a < b + c$

دایره‌ی گذرنده از رئوس مثلث، دایره‌ی درون مثلث و مماس بر اضلاع

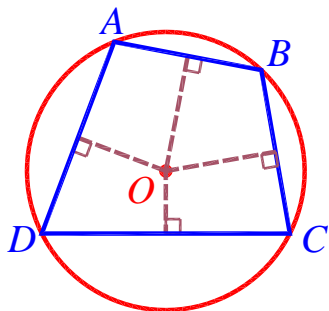


مرکز : محل تلاقی عمود منصف‌ها
حتماً چنین دایره‌ای وجود دارد.



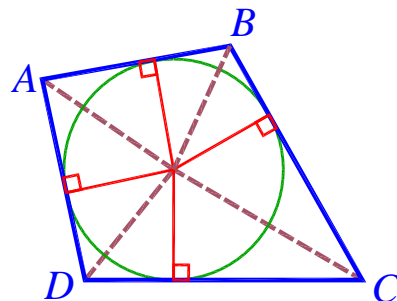
مرکز : محل تلاقی نیمسازها
حتماً چنین دایره‌ای وجود دارد.

دایره‌های مماس بر اضلاع چندضلعی و گذرنده از رئوس چندضلعی



مرکز : محل تلاقی عمود منصف‌ها

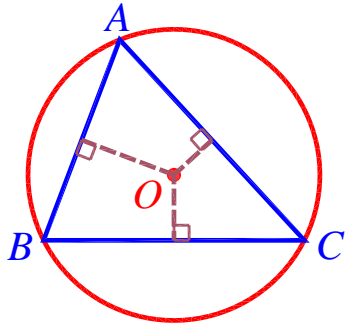
این دایره در صورتی وجود دارد که عمود منصف‌ها هم‌مس باشند.



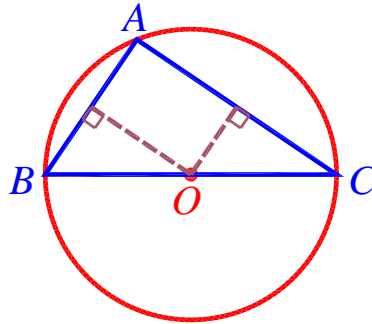
مرکز : محل تلاقی نیمسازها

این دایره در صورتی وجود دارد که نیمسازها هم‌مس باشند.

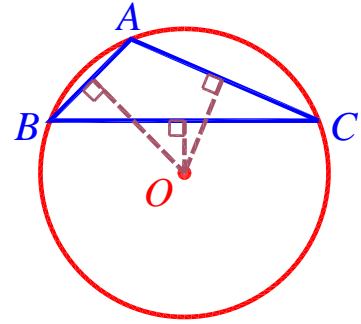
محل قرارگیری مرکز دایره‌ی گذرنده از سه رأس مثلث



مثلثی با زاویه‌های حاده



مثلث قائم‌الزاویه

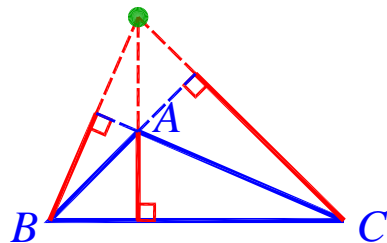
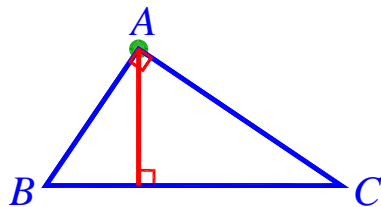
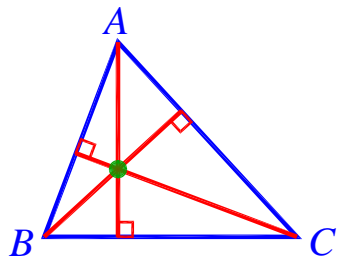
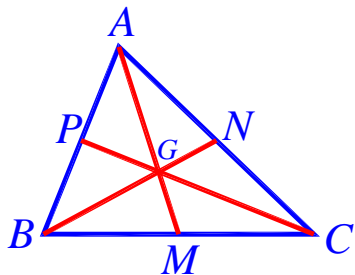


مثلثی با زاویه‌ی منفرجه

محل تلاقی میان‌های مثلث ، محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث

در هر مثلث میان‌ها از یک نقطه‌ی مشترک می‌گذرند که این نقطه را مرکز ثقل مثلث می‌نامیم. این نقطه هر میان‌ه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

$$AG = \frac{2}{3} AM \quad , \quad AG = 2GM \quad , \quad GM = \frac{1}{3} AM$$

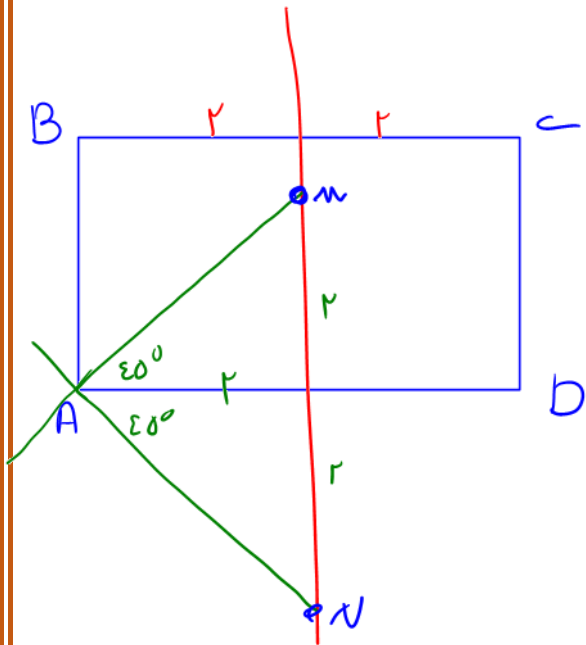


۱۴ مثلثی با زاویه‌های حاده

مثلث قائم‌الزاویه

مثلثی با زاویه‌ی منفرجه

۱- مستطیل $ABCD$ را در نظر بگیرید و فرض کنید: $AB = 3$ و $AD = 4$. نقاطی که از اضلاع AB ، AD و DC به فاصله‌ی مساوی قرار دارند کدام هستند؟



(۱) چهار نقطه، رئوس یک مستطیل

(۲) چهار نقطه، رئوس یک لوزی

(۳) دو نقطه به فاصله‌ی ۳

(۴) دو نقطه به فاصله‌ی ۴ ✓

از AB و DC فاصله‌ی مساوی

از AD به یک فاصله

۲- نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۴ از خط d مفروض است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به

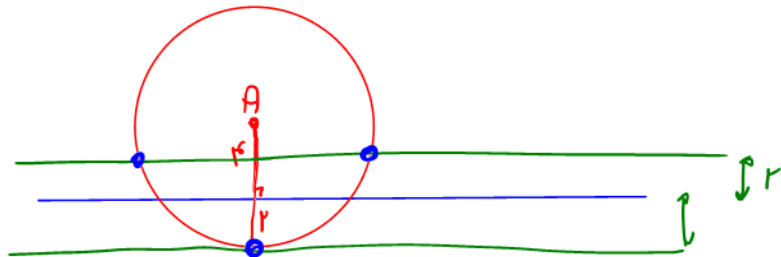
فاصله‌ی ۶ و از d به فاصله‌ی ۲ باشد؟

۴ (۴)

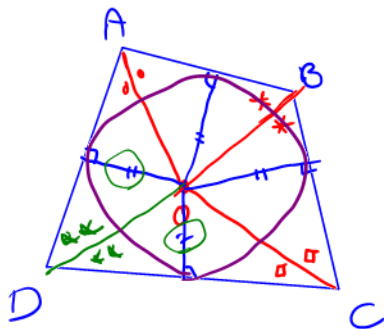
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



۳- در چهارضلعی $ABCD$ ، نیمسازهای رئوس A ، B و C از نقطه‌ی O می‌گذرند. کدام صحیح نیست؟



(۱) نیمساز رأس D از O می‌گذرد. ✓

(۲) نقاط A ، B ، C و D روی یک دایره‌اند. ✗

(۳) دایره‌ای مماس بر اضلاع چهارضلعی وجود دارد. ✓

(۴) نقطه‌ی O از همه‌ی اضلاع چهارضلعی به یک فاصله است. ✓

در هر n ضلعی } اگر $n-1$ تا از نیمسازها هم‌رسان باشند، پس n تا از این نقطه‌ها می‌گذرند و دایره‌ای در آن بر

اضلاع n ضلعی وجود دارد

اگر $n-1$ تا از عمود منتهی اضلاع هم‌رسان باشند n امی هم از این نقطه‌ها می‌گذرند

دایره‌گذرنده از رئوس n ضلعی وجود دارد.

۴- پاره خط AB به اندازه ۸ واحد در صفحه مختصات، مفروض است. چهار دایره با مراکز A و B و

شعاع‌های ۳ و ۷ واحد رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی دایره‌های کوچک با دایره‌های بزرگ، دقیقاً

رأس‌های کدام چهارضلعی هستند؟

(سراسری ریاضی ۹۹)

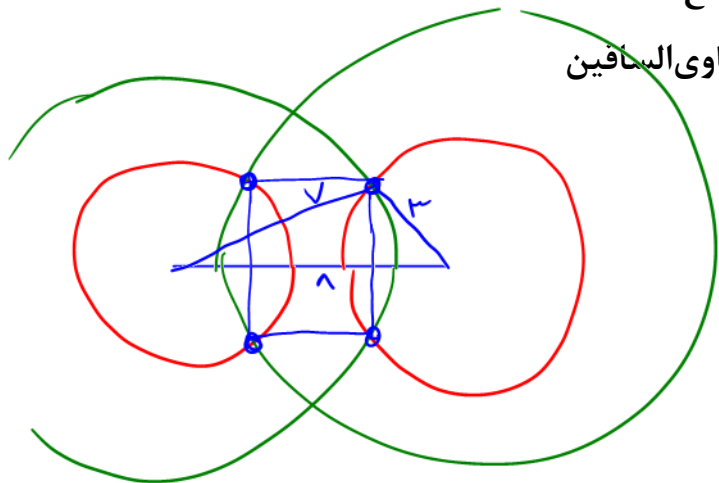
(۱) لوزی

(۲) متوازی‌الاضلاع

(۳) مستطیل ✓

(۴) ذوزنقه متساوی‌الساقین

$$3 + 7 > 8$$



۵- حداقل چند بار از پرگار استفاده کنیم تا به کمک خطکش و پرگار، در یک زاویه 64° ، زاویه‌ی

(آزمون سنبش)

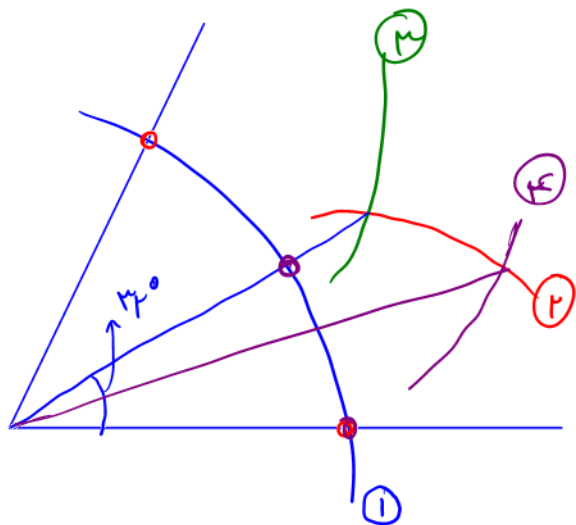
۱° ایجاد کنیم؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)



①, ②

سبب

③ → 32°

④ → 16°

⑤ → 8°

⑥ → 4°

⑦ → 2°

⑧ → 1°

نسبت و تناسب

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

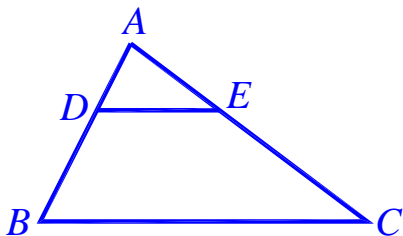
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \dots = k \Leftrightarrow \frac{a+c+\dots}{b+d+\dots} = k$$

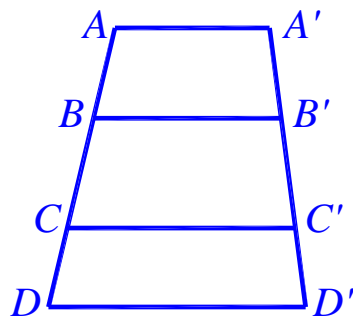
قضیه تالس

(۱) در مثلث ABC که $DE \parallel BC$ است :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} , \quad \frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC} , \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



(۲) عکس قضیه تالس صحیح است. یعنی اگر در مثلث ABC هر یک از تساوی‌های فوق برقرار باشد، آنگاه $DE \parallel BC$.

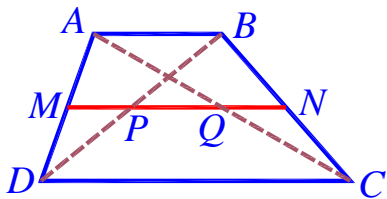


(۳) اگر دو خط مورب، چند خط موازی را مطابق شکل قطع

کنند، روی آن‌ها پاره خط‌های متناسب پدید می‌آید. نمونه‌هایی از این تساوی‌ها را در زیر می‌بینید.

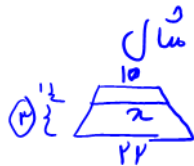
با فرض : $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} \quad , \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad , \quad \frac{AC}{CD} = \frac{A'C'}{C'D'}$$



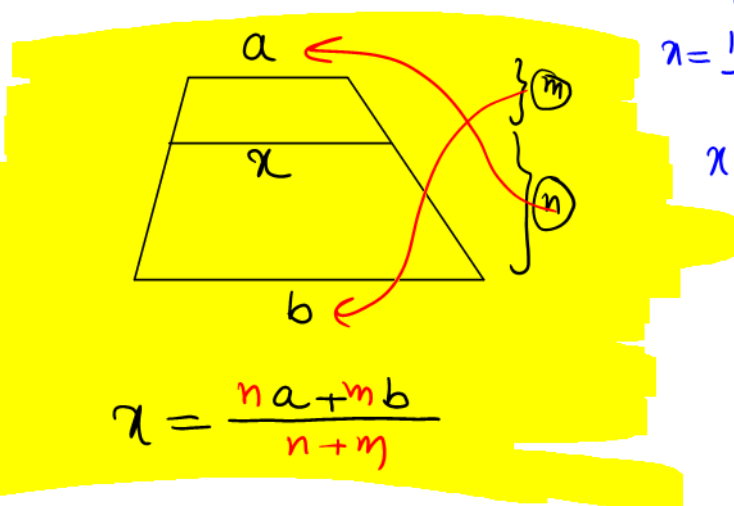
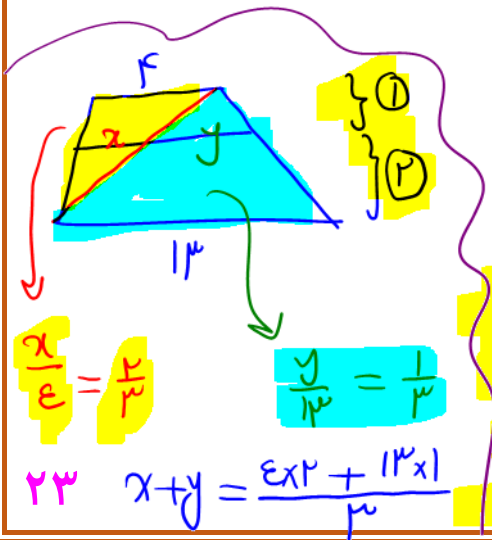
(۴) اگر M و N وسط دو ساق دوزنقه باشند، $AB \parallel MN \parallel CD$ و :

$$MN = \frac{1}{2}(CD + AB) \quad , \quad PQ = \frac{1}{2}(CD - AB)$$



$$\lambda = \frac{1 \times 22 + 12 \times 10}{1 + 12}$$

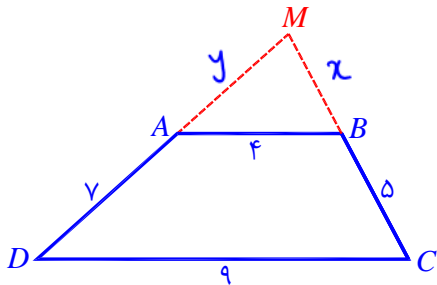
$$\lambda = 13$$



۶- اندازه اضلاع دوزنقه‌ی $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB ، کدام

است؟

(سراسری تیربی ۹۹)



$$\frac{x}{x+5} = \frac{6}{9} \rightarrow x = \frac{10}{3} = 3\frac{2}{3}$$

۱۳/۲ (۱)

۱۳/۶ (۲) ✓

$$\frac{y}{y+7} = \frac{6}{9} \rightarrow y = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

۱۴/۴ (۳)

۱۴/۸ (۴)

$$P_{MAB} = 3\frac{2}{3} + 4\frac{2}{3} + 6 = 14$$

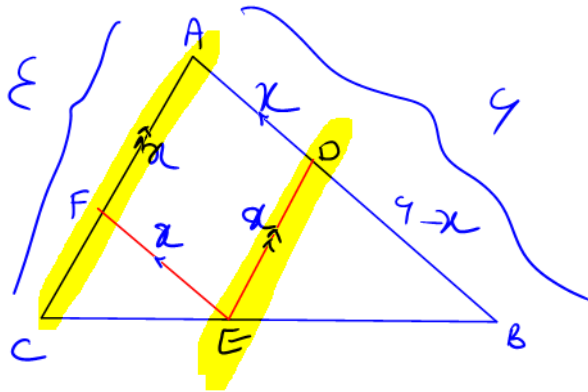
۷- در مثلثی با اضلاع ۴، ۶ و ۷ یک لوزی چنان قرار گرفته است که یک رأس آن روی ضلع بزرگتر و دو ضلع آن واقع بر دو ضلع دیگر مثلث است. طول ضلع این لوزی کدام است؟

۲/۴ (۴)

۲/۲ (۳)

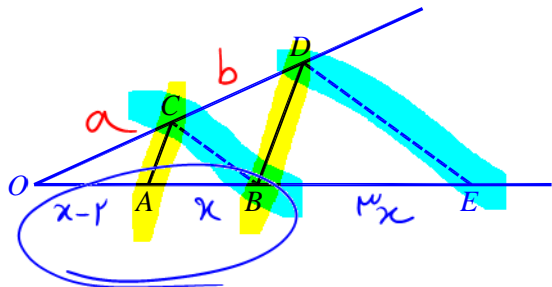
۲ (۲)

۱/۸ (۱)



$$\frac{4-x}{4} = \frac{x}{6} \rightarrow x = \frac{12}{10}$$

۸- در شکل، دو جفت پاره خط موازی اند. $OA = x - 2$ ، $AB = x$ و $BE = 3x$ است. مقدار x کدام است؟



۶ (۲)
 ۴ (۴)

۵ (۱)
 ۳ (۳)

$$\frac{a}{b} = \frac{x-2}{x}$$

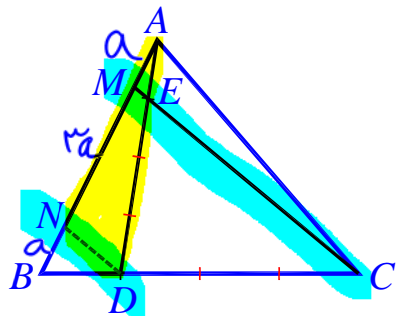
$$\rightarrow \frac{x-2}{x} = \frac{2x-2}{3x} \rightarrow 3x-6 = 2x-2$$

$$x = 4$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2x-2}{3x}$$

۹- در شکل زیر، $AE = \frac{1}{4}AD$ ، $BD = \frac{1}{4}BC$ و $DN \parallel CM$ ، اندازه‌ی AB چند برابر AM است؟

(سراسری ریاضی فارغ ۹۷)



$$\frac{AB}{AM} = x$$

$$\frac{BN}{NM} = \frac{BD}{CD} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{DE} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\frac{AM}{\frac{1}{3}a} = \frac{1}{3} \rightarrow AM = a$$

۴/۵ (۲)

۶ (۴)

۴ (۱)

۵ (۳)

۱۰- در یک ذوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵

(سراسری ریاضی ۹۸)

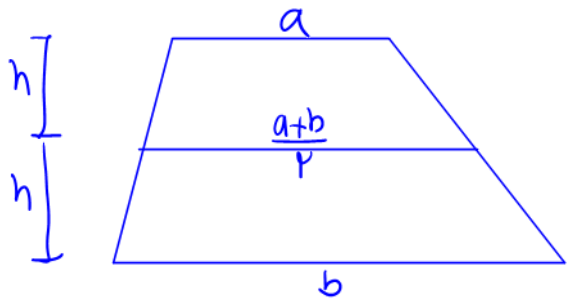
تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های ذوزنقه کدام است؟

$$\frac{3}{5} (۴)$$

$$\frac{2}{5} (۳)$$

$$\frac{1}{3} (۲)$$

$$\frac{1}{4} (۱)$$



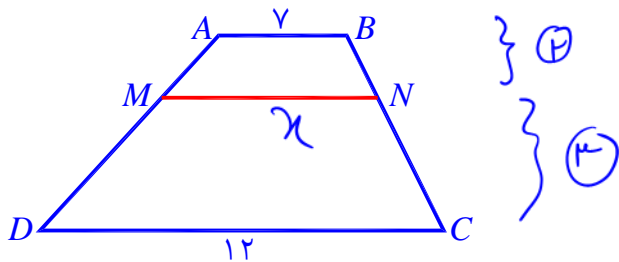
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}h(a + \frac{a+b}{2})}{\frac{1}{2}h(b + \frac{a+b}{2})} = \frac{\mu}{\alpha}$$

$$\frac{3a + b}{3b + a} = \frac{\mu}{\alpha} \rightarrow 15a + 5b = 9b + 3a$$

$$\rightarrow 12a = 4b \rightarrow b = 3a$$

۱۱- در ذوزنقهی $ABCD$ ، پاره خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$ است. اندازه‌ی MN ، کدام است؟

(سراسری تیربی فارغ ۹۹)



$$8/75 \quad (2)$$

$$9/5 \quad (4)$$

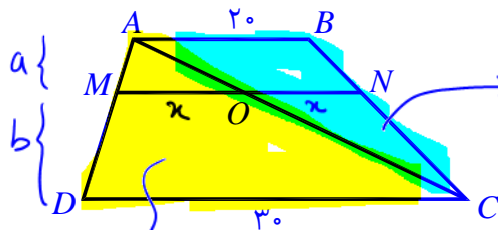
$$8 \quad (1)$$

$$9 \quad (3)$$

$$x = \frac{r(12) + k(7)}{r+k} = 9$$

۱۲- در شکل روبه‌رو MN موازی دو قاعده‌ی دوزنقه است. اگر نقطه‌ی O وسط MN باشد، طول

پاره‌خط MN کدام است؟



$$\frac{x}{10} = \frac{b}{b+a}$$

$$\frac{x}{10} = \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{10} = \frac{a+b}{a+b} \quad |$$

$$\rightarrow \frac{2x}{10} = 1 \rightarrow \boxed{x=5}$$

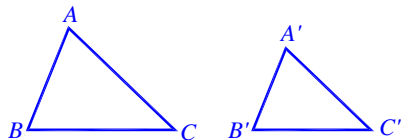
۲۳ (۲)

۲۵ (۴)

۲۲ (۱)

۲۴ (۳)

تشابه مثلث‌ها



قضیه‌های اصلی تشابه

(۱) هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \right) \Rightarrow ABC \sim A'B'C'$$

(۲) هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه‌ی بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\hat{A} = \hat{A}', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \right) \Rightarrow ABC \sim A'B'C'$$

(۳) هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow ABC \sim A'B'C'$$

نسبت اجزای متناظر

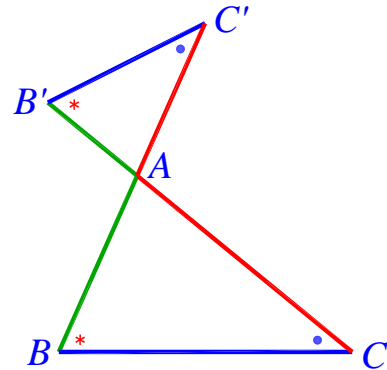
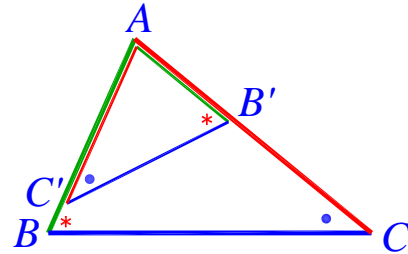
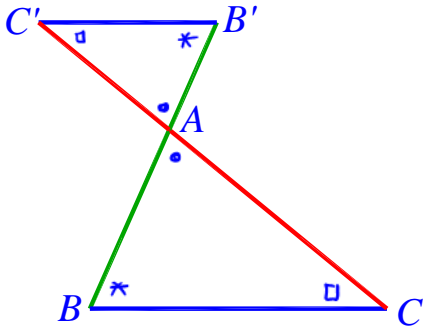
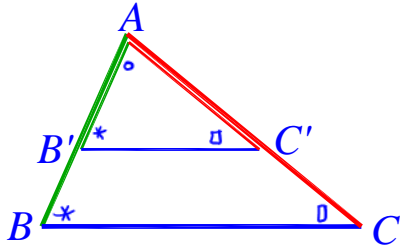
نسبت هر دو جزء طولی متناظر در دو شکل متشابه، با نسبت تشابه برابر است. مثلاً در دو مثلث متشابه، نسبت دو میانه متناظر با یک رأس یا دو نیمساز و یا دو ارتفاع متناظر در دو مثلث دارای نسبتی برابر نسبت تشابه این دو مثلث می‌باشند. همچنین نسبت محیط‌های دو شکل متشابه با نسبت تشابه برابر و نسبت مساحت آنها مجذور نسبت تشابه است.

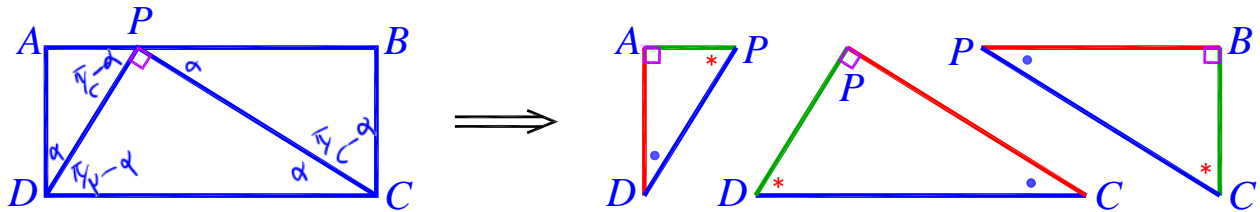
پس در دو مثلث با نسبت تشابه k :

$$\text{نسبت محیط‌ها} = k$$

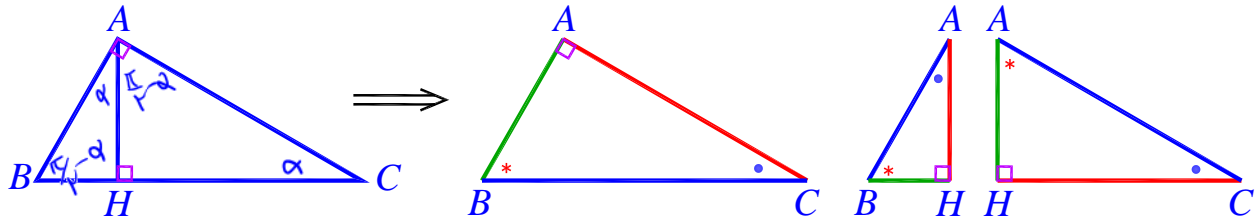
$$\text{نسبت مساحت‌ها} = k^2$$

چند تشابه معروف

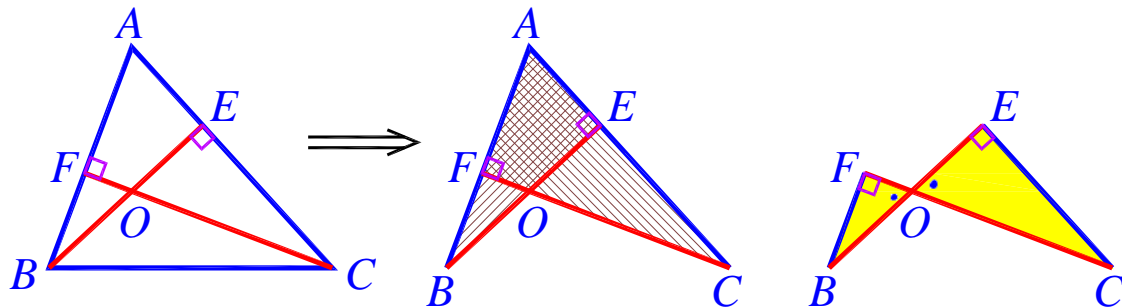




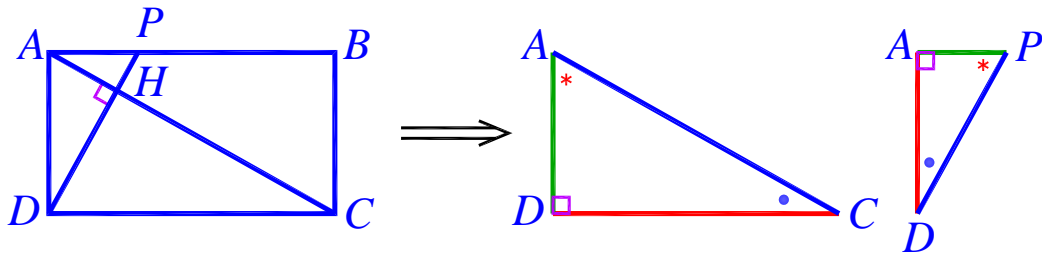
در یک مثلث قائم الزاویه با رسم ارتفاع، سه مثلث متشابه ایجاد می شود.



در هر مثلث با رسم دو ارتفاع، چهار مثلث متشابه ایجاد می شود.



در یک مستطیل با رسم یک قطر و خطی عمود بر آن؛ مطابق شکل، دو مثلث متشابه ایجاد می شود.



۱۳- اندازه‌ی محیط‌های دو مثلث متشابه، به ترتیب ۱۲ و ۸ است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۶ و یک ضلع مثلث کوچک‌تر ۳ باشد، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر آن کدام است؟

$$2\frac{7}{9} \text{ (۴)}$$

$$1\frac{7}{9} \text{ (۳)}$$

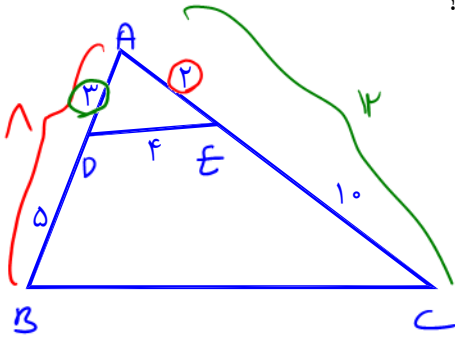
$$2\frac{5}{9} \text{ (۲)}$$

$$1\frac{5}{9} \text{ (۱)}$$

$$K = \frac{A}{12} = \frac{6}{12} \rightarrow K = \frac{1}{2} = \frac{S'}{9} \rightarrow S' = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \times h \times 3 = \frac{9}{2} \rightarrow h = \frac{12}{9}$$

۱۴- در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی ضلع بزرگ‌تر چهارضلعی کدام است؟



۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

۱۸ (۴)

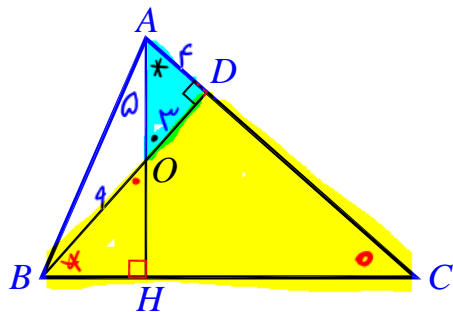
۱۶ (۳)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow ADE \sim ABC, K = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow BC = 2 \cdot DE = 2(x) = 10$$

۱۵- در شکل روبه‌رو دو ارتفاع از مثلث ABC در نقطه‌ی O متقاطع‌اند. اگر $AD = 4$ ، $DO = 3$ و $BO = 9$ باشد، طول ضلع BC کدام است ؟



۱۵ (۲) ✓

۱۲ (۱)

۲۰ (۴)

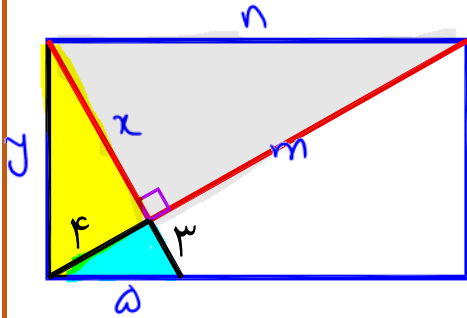
۱۸ (۳)

$$\triangle AOD \sim \triangle BDC$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{DO}{DC} = \frac{AO}{BC}$$

$$\rightarrow \frac{4}{12} = \frac{3}{DC} = \frac{9}{BC} \rightarrow \underline{BC = 12}$$

۱۶- در شکل روبه‌رو، محیط مستطیل برابر چقدر است؟



$$30 \frac{1}{9} \text{ (۲)}$$

$$30 \frac{7}{9} \text{ (۱)}$$

$$31 \frac{2}{9} \text{ (۴)}$$

$$31 \frac{1}{9} \text{ (۳) ✓}$$

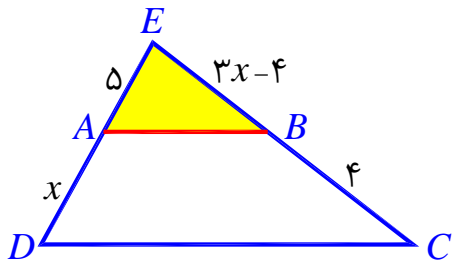
$$\frac{r}{\varepsilon} = \frac{r}{x} = \frac{a}{y} \rightarrow x = \frac{14}{3} \text{ و } y = \frac{10}{3}$$

$$\frac{14}{3} \leftarrow \frac{r}{x} = \frac{\varepsilon}{m} = \frac{a}{n} \rightarrow \frac{9}{14} = \frac{\varepsilon}{m} = \frac{a}{n} \rightarrow n = \frac{10}{9}$$

$$P = 2(y+n) = 2\left(\frac{10}{3} + \frac{10}{9}\right) = \frac{20}{9} = 2 \frac{2}{9}$$

۱۷- در شکل زیر، مساحت ذوزنقه $ABCD$ ، چند برابر مساحت مثلث EAB است؟

(سراسری ریاضی فارغ ۹۹)



$$\frac{16}{9} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\frac{9}{4} \quad (1)$$

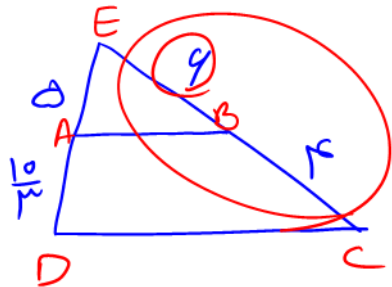
$$\frac{36}{25} \quad (4)$$

$$\frac{25}{16} \quad (3)$$

$$\frac{d}{x} = \frac{3x-4}{5} \rightarrow 3x^2 - 4x - 20 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{44}}{3} < \frac{10}{3}$$

$$-2x$$



$$\frac{S_{EAB}}{S_{EDC}} = \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

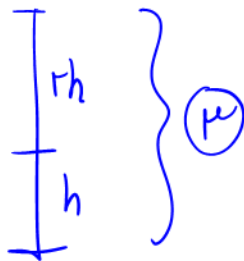
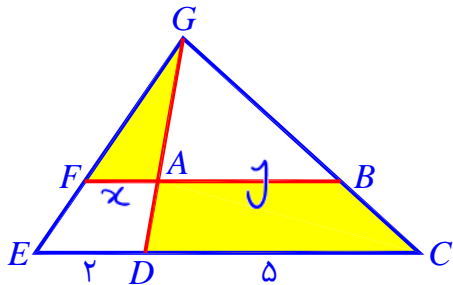


۴۰

۱۸- در شکل زیر، $DG = 3DA$ و اندازه پاره‌خط‌های DE و DC به ترتیب، ۲ و ۵ واحد هستند.

(سراسری ریاضی ۹۹)

مساحت مثلث AFG ، چند درصد مساحت ذوزنقه $ABCD$ است؟



۴۰ (۱)

۳۶ (۲)

۳۲ (۳) ✓

۲۴ (۴)

$$\frac{x}{r} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{y}{5} = \frac{r}{3}$$

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \times r \times h \times x}{\frac{1}{2} \times h \times (2+5)}$$

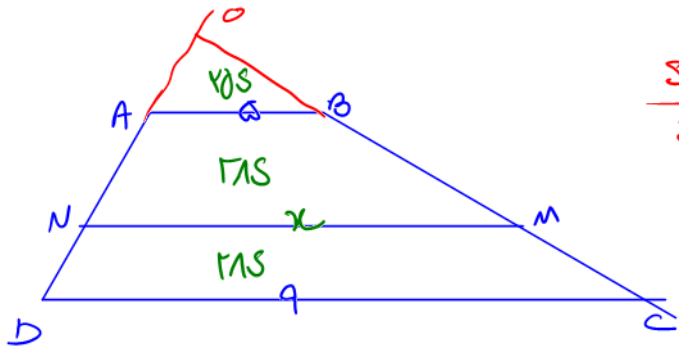
$$= \frac{r \times \frac{2}{3}}{2 + \frac{5}{3}} = \frac{1}{2.5} = 40\%$$

۱۹- اندازه قاعده‌های دوزنقه‌ای ۵ و ۹ واحد است. پاره‌خطی موازی قاعده‌های دوزنقه چنان رسم می‌کنیم که دوزنقه را به دو قسمت با مساحت مساوی، تقسیم کند. اندازه پاره‌خط، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۹)

$$\sqrt{53} \quad (۲) \quad \checkmark \quad ۷ \quad (۱)$$

$$\sqrt{57} \quad (۴) \quad ۴\sqrt{3} \quad (۳)$$



$$\frac{S_{OAB}}{S_{ODC}} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

$$\begin{cases} S_{OAB} = 48 \\ S_{ODC} = 115 \end{cases} \rightarrow S_{ABCD} = 115 - 48 = 67$$

$$\frac{48}{x} = 67$$

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OAMN}} = \frac{48}{48+67} = \left(\frac{4}{x}\right)^2 \rightarrow \frac{16}{115} = \frac{16}{x^2} \rightarrow x^2 = 115$$

۴۲

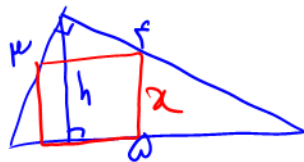
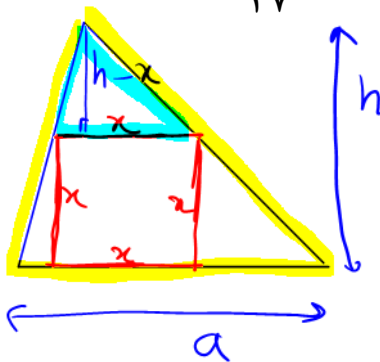
۲۰- در مثلثی با اضلاع ۳، ۴ و ۵ یک مربع چنان قرار گرفته است که یک ضلع آن واقع بر ضلع مثلث بزرگ مثلث است و دو رأس آن روی دو ضلع دیگر مثلث قرار دارند. طول ضلع این مربع کدام است؟

$$\frac{62}{37} \quad (۴)$$

$$\frac{60}{37} \quad (۳) \quad \checkmark$$

$$\frac{52}{29} \quad (۲)$$

$$\frac{50}{29} \quad (۱)$$



$$h \times a = b \times c$$

$$h = \frac{bc}{a}$$

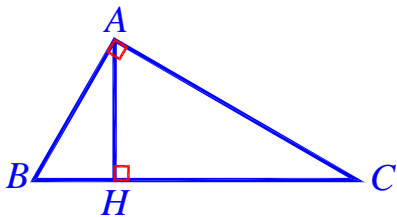
$$x = \frac{a \times \frac{bc}{a}}{a + \frac{bc}{a}} = \frac{40}{37}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h} \rightarrow x = \frac{ah}{a+h}$$

۴۳

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BA^2 = BH \cdot BC$$

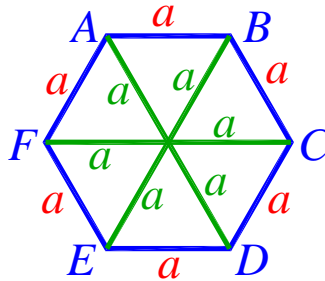
$$CA^2 = CH \cdot CB$$

$$AH^2 = BH \cdot CH$$

$$2S = AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

شش ضلعی منتظم

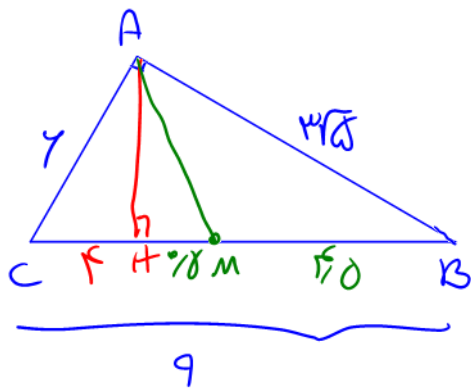
با رسم قطرهای بزرگ شش ضلعی منتظم، شش مثلث متساوی الاضلاع پدید می آید.



۲۱- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، اضلاع قائم $AB = 3\sqrt{5}$ و $AC = 6$ ، ارتفاع AH و میانه‌ی AM

رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

(سراسری تیربی ۹۱)



۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

۱۸ (۴) ✓

۱۵ (۳)

$$BC^2 = 3^2 + 6^2 \rightarrow BC = 9$$

$$9^2 = CH \times 9 \Rightarrow CH = 6$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot BC}{\frac{1}{2}AH \cdot MH} = \frac{BC}{MH} = \frac{9}{\frac{3}{2}} = 6$$

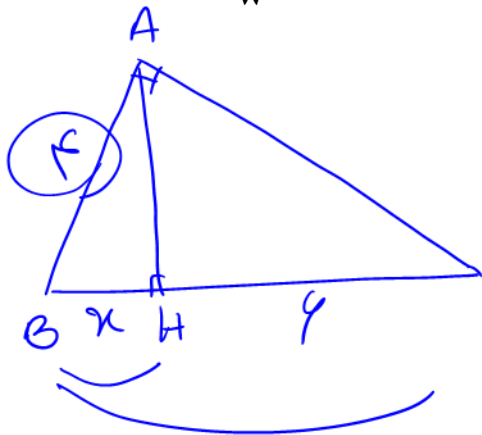
۲۲- در مثلث قائم الزاویه ABC ارتفاع وارد بر وتر AH را رسم می‌کنیم. با فرض $AB = 4$ و $CH = 6$ ، نسبت مساحت دو مثلث ACH و ABC کدام است؟

$$\frac{5}{8} \text{ (۴)}$$

$$\frac{5}{6} \text{ (۳)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۲) ✓}$$

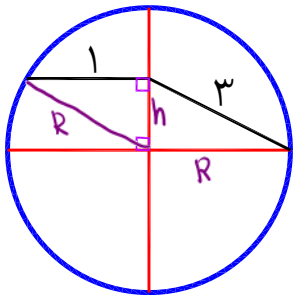
$$\frac{2}{3} \text{ (۱)}$$



$$x^2 = x(x+6) \rightarrow x=2$$

$$\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot CH}{\frac{1}{2} AH \cdot BC} = \frac{CH}{BC} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۲۳- در شکل روبه‌رو، دو قطر عمود بر هم در دایره می‌بینید. شعاع دایره کدام است؟



$$2 \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\sqrt{6} \quad (4)$$

$$\sqrt{5} \quad (3)$$

$$\begin{cases} h^2 + R^2 = 3^2 \\ h^2 + 1^2 = R^2 \end{cases}$$

$$\ominus \rightarrow R^2 - 1 = 9 - R^2$$

$$\rightarrow R^2 = 5$$

۲۴- در مستطیل $ABCD$ به طول $AB = 17$ ، از نقطه A عمود AH بر قطر BD رسم شده است.

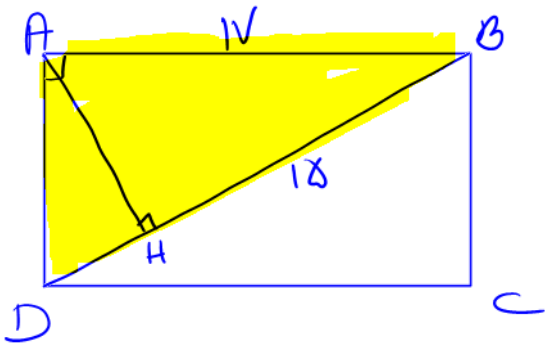
اگر $BH = 15$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟ (سراسری تیرین فارغ ۹۸)

$$\frac{3}{5} \text{ (۴)}$$

$$\frac{7}{15} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{4}{15} \text{ (۱) ✓}$$



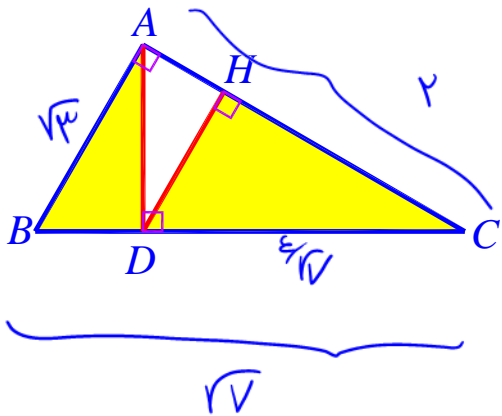
$$17^2 = 15 \times BD \rightarrow BD = \frac{289}{15}$$

$$\frac{289}{15} - 19 = \frac{4}{15}$$

۲۵- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{3}$ و $AC = 2$ است. نسبت مساحت‌های

(سراسری تیرپی ۹۹)

دو مثلث قائم‌الزاویه ABD و HCD ، کدام است؟



$$\frac{4}{7} \quad (2)$$

$$\frac{8}{9} \quad (4)$$

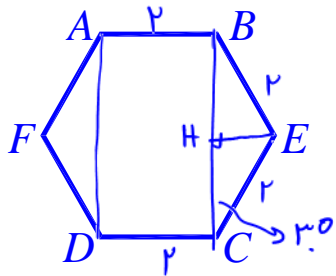
$$\frac{3}{7} \quad (1)$$

$$\frac{16}{21} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$2 = CD \times \sqrt{7} \rightarrow CD = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{S_{DHC}}{S_{ABD}} = k^2 = \left(\frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{\frac{4}{7}}{3} = \frac{4}{21}$$

۲۶- در شش ضلعی منتظم شکل روبه‌رو به ضلع ۲، مساحت چهارضلعی $ABCD$ چقدر است؟



$$2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$1 + 2\sqrt{3} \quad (1)$$

$$4\sqrt{3} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

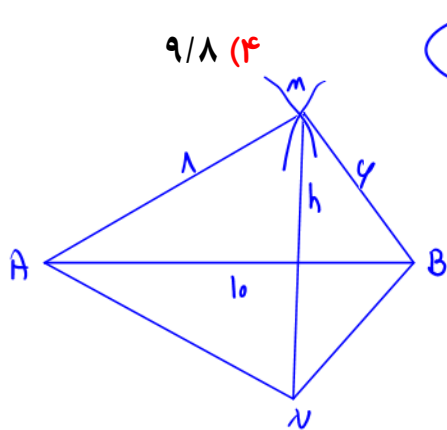
$$CH = 2 \times \cos 30^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}$$

$$BC = 2\sqrt{3}$$

$$S = 2 \times 2\sqrt{3}$$

آزمون:

۲۷- دو نقطه A و B به فاصله‌ی ۱۰ واحد در یک صفحه قرار دارند. دو نقطه‌ی M و N در همین صفحه چنان قرار گرفته‌اند که هر دو به فاصله‌ی ۸ از A و به فاصله‌ی ۶ از B قرار دارند. طول پاره-خط MN کدام است؟



۹/۸ (۴)

۹/۶ (۳)

۹/۲ (۲)

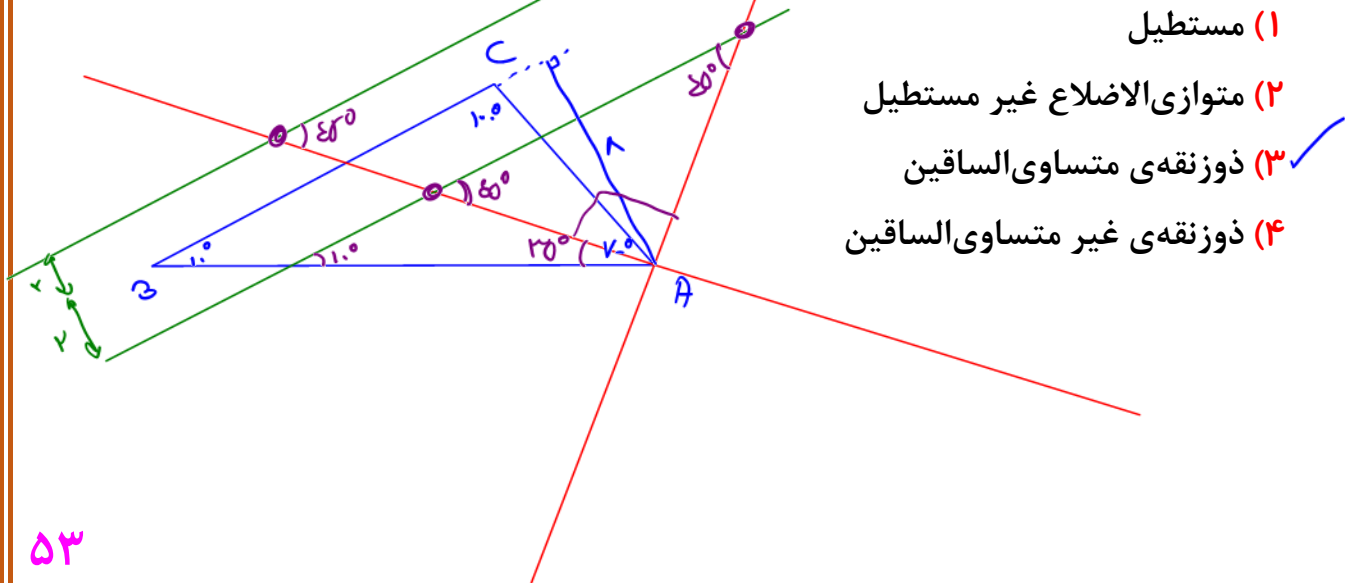
۸/۸ (۱)

$$6^2 + 1^2 = 10^2 \rightarrow \text{ماتر از لرون}$$

$$h \times 10 = 6 \times 8 \rightarrow h = 4,8$$

$$2h = 9,6$$

۲۸- مثلث ABC که زاویه A برابر 70° درجه و B برابر 10° درجه و ارتفاع رأس A ، 8 واحد است را در نظر بگیرید. نقاطی در صفحه‌ی این مثلث وجود دارد که از اضلاع AB و AC هم فاصله باشد و همچنین به فاصله‌ی 2 واحد از ضلع BC قرار داشته باشد. رئوس کدام چهارضلعی است؟



(۱) مستطیل

(۲) متوازی‌الاضلاع غیر مستطیل

(۳) دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین

(۴) دوزنقه‌ی غیر متساوی‌الساقین

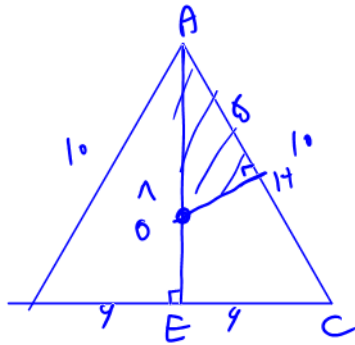
۲۹- شعاع دایره‌ی گذرنده از رئوس مثلثی با اضلاع ۱۰، ۱۰ و ۱۲ کدام است؟

۶/۷۵ (۴)

۶/۵ (۳)

۶/۲۵ (۲)

۶ (۱)



$$OHA \sim AEC$$

$$\frac{r}{h} = \frac{OA}{10} \rightarrow OA = \frac{r \cdot 10}{h} = 7,25$$

۳۰- چند نقطه متمایز برای رأس C در مثلث ABC واقع در صفحه مختصات، می توان یافت که

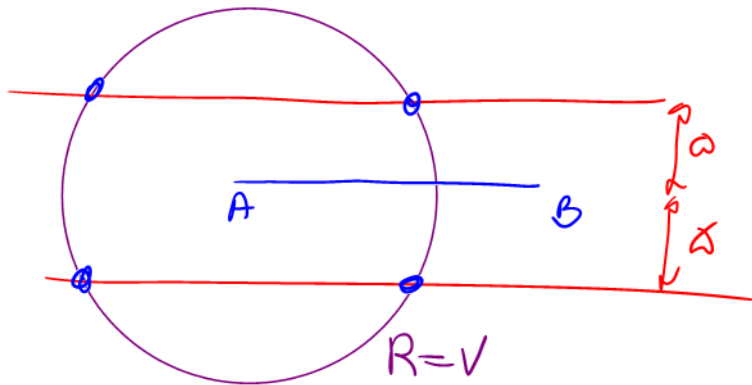
فاصله رأس C از نقطه A و پاره خط AB ، به ترتیب ۷ و ۵ واحد، باشد؟ (سراسری ریاضی فارج ۹۹)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



۳۱- برای رسم خطی به موازات خط d ، گذرا از نقطه‌ای غیر واقع بر d به کمک خط کش و پرگار،

(آزمون سنش)

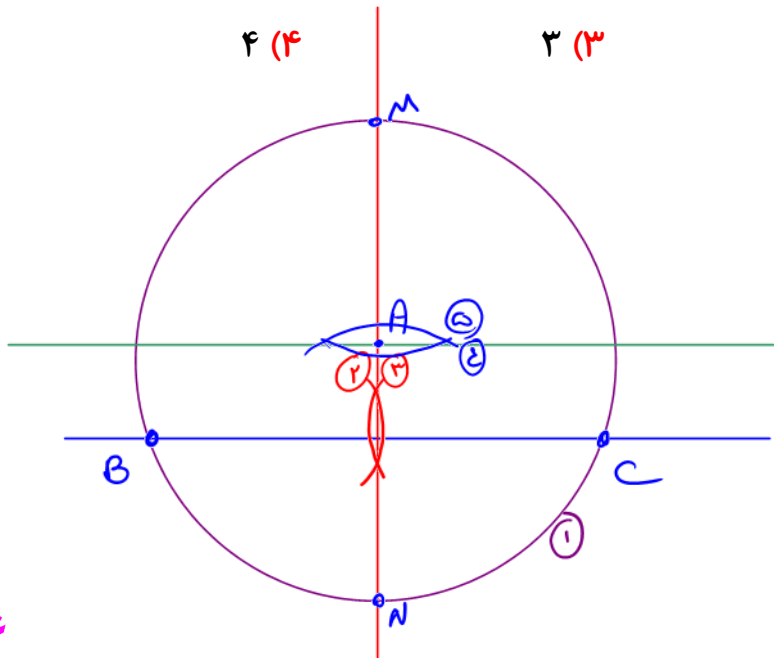
۴ (۴)

۳ (۳)

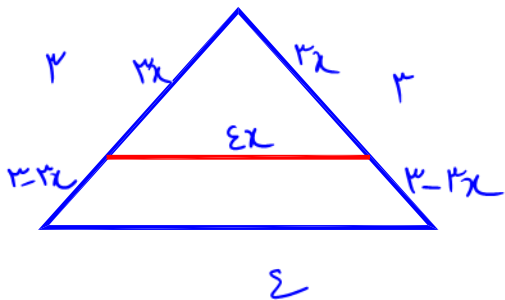
حداقل چند دایره باید رسم کنیم؟

۵ (۲)

۶ (۱)



۳۲- در شکل روبه‌رو طول اضلاع مثلث بزرگ ۳، ۳ و ۴ است. خطی به موازات ضلع بزرگتر رسم شده است. اگر محیط ذوزنقه برابر محیط مثلث کوچک‌تر باشد، مساحت ذوزنقه چند درصد مساحت مثلث کوچک‌تر است؟



- ۳۵ (۱) ۴۴ (۲) ✓
 ۴۸ (۳) ۵۲ (۴)

$$3x + 3x + \varepsilon x = \varepsilon x + 3 - 3x + 3 - 3x + \varepsilon$$

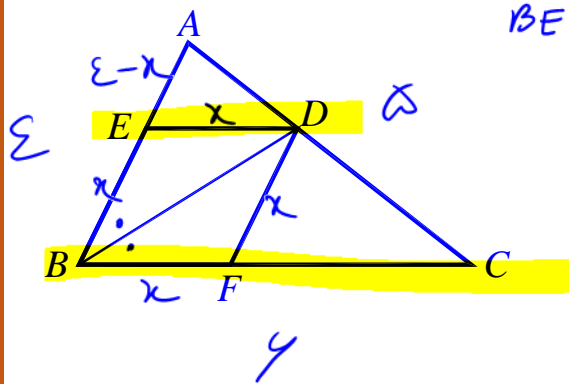
$$12x = 10 \rightarrow x = \frac{5}{6}$$

$$\text{مساحت} = x^2 = \frac{25}{36}$$



$$\frac{11}{18} = \frac{61}{100}$$

۳۳- در شکل روبه‌رو، DE و DF موازی BC و AB هستند. BD نیمساز رأس B از مثلث ABC است. اگر $AB = 4$ ، $AC = 5$ و $BC = 6$ باشد، طول پاره خط AD کدام است؟

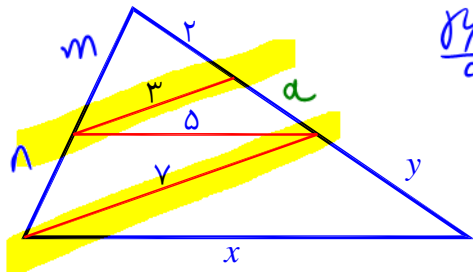


$$\begin{array}{l} 2 \text{ (2)} \\ 2/4 \text{ (4)} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1/8 \text{ (1)} \\ 2/2 \text{ (3)} \end{array}$$

$$\frac{\epsilon - x}{\epsilon} = \frac{x}{\gamma} \rightarrow 2\epsilon - 6x = \epsilon x$$

$$x = \frac{2}{7}\epsilon$$

۳۴- در شکل، دو جفت خط موازی می بینید. $x + y$ چقدر است؟



$$\frac{84}{9} + \frac{36}{3} = \frac{141}{9} = 17\frac{1}{9} \quad (2)$$

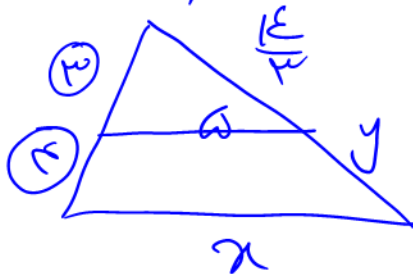
$$18\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$17\frac{1}{9} \quad (1) \quad \checkmark$$

$$17\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{r}{r+a} = \frac{r}{v} \rightarrow 18 = 9 + ra \rightarrow a = \frac{1}{r}$$

$$\frac{m}{n+m} = \frac{r}{v} \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{r}{3}$$



$$\frac{8}{x} = \frac{r}{v}$$

$$x = \frac{8v}{r}$$

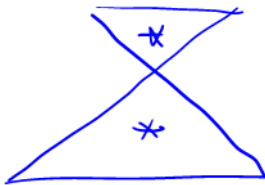
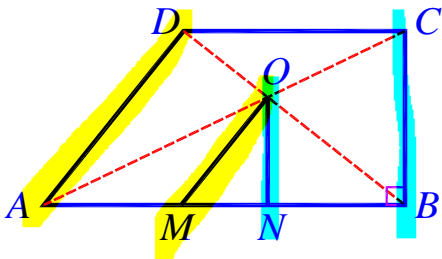
$$\frac{84}{9} = \frac{r}{3} \rightarrow y = \frac{84}{9}$$

۵۹

۳۵- مطابق شکل زیر، از محل تلاقی قطرهای دوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ ($B = 90^\circ$)، پاره‌خط‌های

OM و ON به ترتیب موازی با AD و BC رسم شده‌اند. نسبت $\frac{AM}{BN}$ ، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۹)



۱ (۱) ✓

۲ (۲)

۳ (۳) کوچکتر از ۱

۴ (۴) بزرگتر از ۱ کوچکتر از ۲

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DO}{OB}$$

$$\frac{BN}{AN} = \frac{OC}{OA}$$

$$\rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{BN}{AN} \xrightarrow{\text{ترتیب برعکس}} \frac{AM}{AN} = \frac{BN}{MB}$$

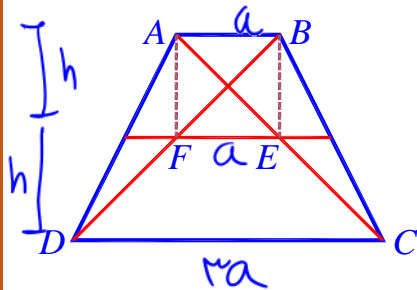
$$\rightarrow AM = BN$$

۶۰

۱۳۶- در دوزنقه‌ی $ABCD$ ، نسبت قاعده‌ها $\frac{1}{3}$ است. خط واصل به اوساط ساق‌ها، اقطار دوزنقه را در

E و F قطع کرده است. مساحت چهارضلعی $ABEF$ ، چند برابر مساحت دوزنقه‌ی اولیه است؟

(سراسری ریاضی ۹۷)



$$EF = \frac{3a - a}{2} = a$$

$$\frac{1}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۴) \checkmark$$

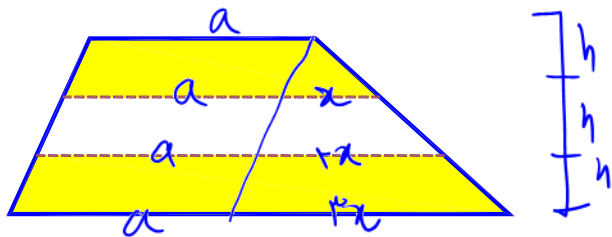
$$\frac{2}{9} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{16} \quad (۳)$$

$$S_{ABEF} = a \times h$$

$$S_{کل} = \frac{1}{2} \times 3h \times (a + 3a) = 2ah$$

۳۷- در دوزنقه‌ی شکل زیر خطوط موازی قاعده، هر ساق را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. اگر مساحت دوزنقه‌های سایه زده، یکی ۳ برابر دیگری باشد، نسبت قاعده‌های این دوزنقه کدام است؟



۶ (۲)

۴ (۴)

۷ (۱)

۵ (۳)

$$\frac{\cancel{\frac{1}{2}h(a+a+x)}}{\cancel{\frac{1}{2}h(a+2x+a+3x)}} = \frac{1}{3} \rightarrow 2a+3x = 2a+3x \rightarrow x=2a$$

$$\frac{a+3x}{a} = \frac{a+6a}{a} = 7$$

۶۲

۳۸- در یک دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه، طول دو قاعده و ساق قائم به ترتیب ۹، ۱۶ و ۱۲ است. محیط

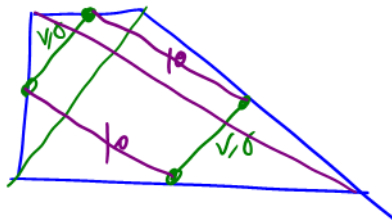
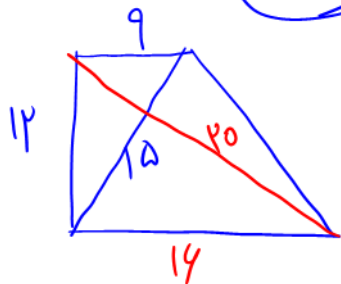
چهارضلعی که رئوس آن وسط اضلاع این دوزنقه باشد کدام است؟

۳۵ (۴)

۳۳ (۳)

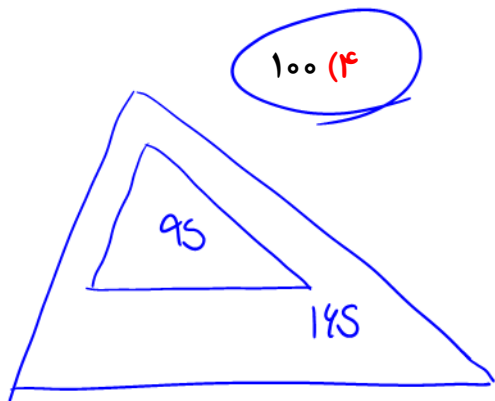
۳۰ (۲)

۲۸ (۱)



$$\underline{\text{گزینه}} = 2(10 + 7.5) = 35$$

۳۹- دو مثلث یکی درون دیگری قرار دارد. اضلاع آنها دو به دو موازی است. مساحت ناحیه بین دو مثلث $\frac{16}{9}$ برابر مساحت مثلث کوچک است. اگر محیط مثلث کوچک برابر ۶۰ باشد، محیط مثلث بزرگتر کدام است؟



۹۰ (۳)

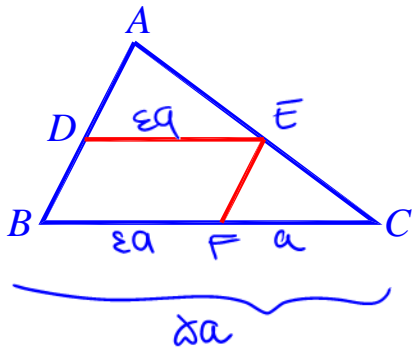
۸۰ (۲)

۷۵ (۱)

$$\frac{95}{95+145} = k^2 \rightarrow k^2 = \frac{9}{20} \rightarrow k = \frac{3}{\sqrt{20}}$$

$$\frac{40}{P} = \frac{3}{\sqrt{20}} \rightarrow P = 100$$

۴۰- در شکل، $DA = ۴DB$ است. مساحت متوازی الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



$$\frac{DE}{BC} = \frac{\epsilon h}{h}$$

$$۳۰ (۲)$$

$$۲۸ (۱)$$

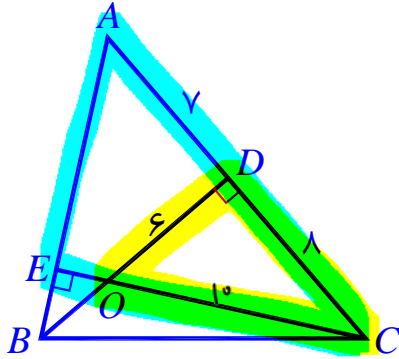
$$۲۴ (۴)$$

$$۲۲ (۳)$$



$$\frac{S_{DEFB}}{S_{ABC}} = \frac{\epsilon a \times h}{\frac{\delta a \times \delta h}{2}} = \frac{\Delta}{10} = \frac{۲۲}{۱۰۰}$$

۴۱- با توجه به شکل روبه‌رو، مساحت چهارضلعی $ADOE$ چقدر است؟



$$\frac{30}{2} = 15$$

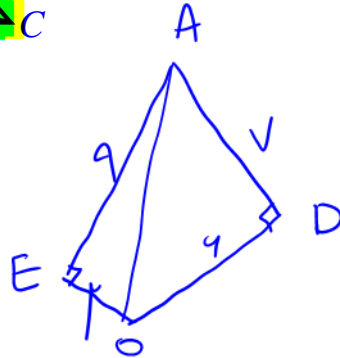
$$29 \quad (1)$$

$$32 \quad (4)$$

$$31 \quad (3)$$

$$\frac{1}{EC} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \rightarrow EC = 12$$

$$AE = 4$$



$$S = \frac{4 \times 6}{2} + \frac{6 \times 4}{2} = 30$$

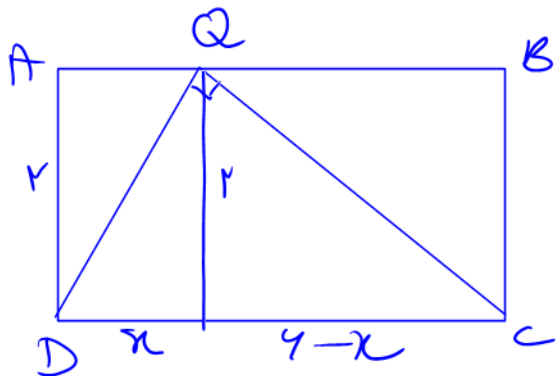
۴۶- مستطیل $ABCD$ با اضلاع به طول‌های ۲ و ۶ مفروض است. نقطه‌ی Q روی ضلع AB چنان است مثلث CQD قائم‌الزاویه است. نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی Q تا رئوس مستطیل کدام است؟

$$\sqrt{6} - 2 \quad (۴)$$

$$3 - \sqrt{5} \quad (۳)$$

$$2 - \sqrt{3} \quad (۲)$$

$$3 - \sqrt{2} \quad (۱)$$



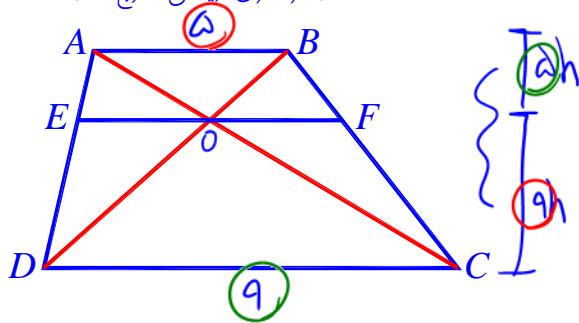
$$x(6-x) = 2^2$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{5}$$

۴۳- در شکل زیر، $AB \parallel EF \parallel DC$ و اندازه پاره‌های AB و DC ، به ترتیب ۵ و ۹ واحد است.

(سراسری ریاضی فارغ ۹۹)



اندازه پاره خط EF ، کدام است؟

$$\frac{45}{6} \quad (2)$$

$$7 \quad (4)$$

$$\frac{45}{7} \quad (1) \quad \checkmark$$

$$3\sqrt{5} \quad (3)$$

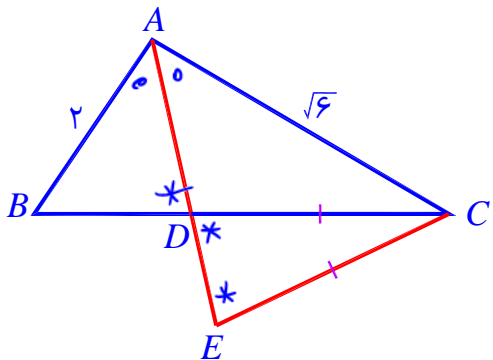
$$AOB \sim COD \rightarrow \frac{AO}{CO} = k$$

$$\frac{AO}{OC} = \frac{5}{9}$$

$$EF = \frac{9 \times 5 + 5 \times 9}{5 + 9} = \frac{90}{14} = \frac{45}{7}$$

۴۴- در شکل زیر، AD نیمساز زاویه A و $CE = CD$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و

(سراسری تیرین فارچ ۹۹)



ACE ، کدام است؟

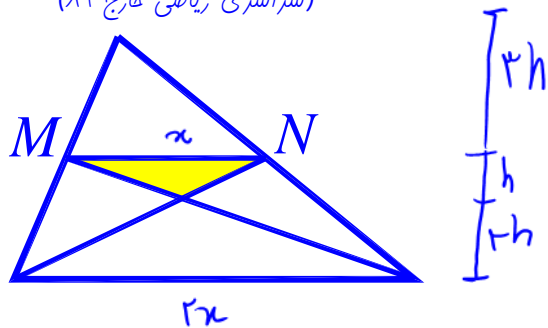
$\frac{2}{2}$ (۲)	$\frac{1}{3}$ (۱)
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)	$\frac{2}{4}$ (۳)

$$ACE \sim ABD \rightarrow K = \frac{K}{\sqrt{6}}$$

$$\rightarrow K = \frac{8}{6}$$

۴۵- در شکل مقابل نقاط M و N وسط دو ضلع است. مساحت بزرگترین مثلث، چند برابر مساحت

(سراسری ریاضی فارغ ۱۹)



مثلث سایه زده است؟

۸ (۲)

۶ (۱)

۱۲ (۴)

۹ (۳)

$$\frac{x \times h \times \frac{1}{2}}{2x \times 3h \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{12}$$

۱۴۶- مثلث ABC در رأس A قائم الزاویه است. ارتفاع AH را رسم کرده ایم. اگر اندازه CH و AB

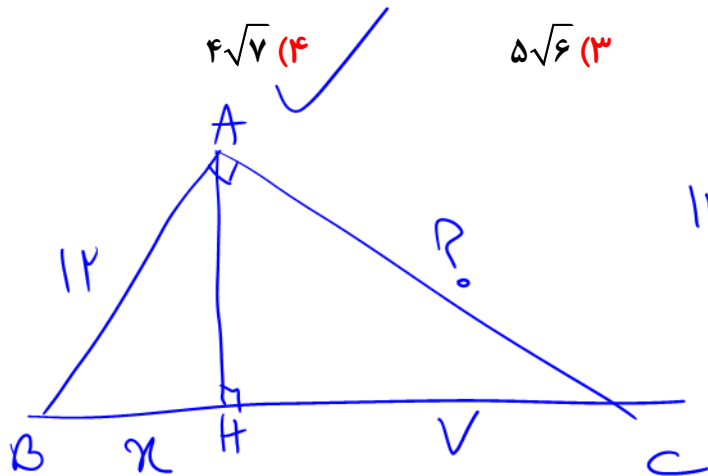
به ترتیب ۱۲ و ۷ باشد، طول ضلع AC کدام است؟

$$4\sqrt{7} \quad (۴)$$

$$5\sqrt{6} \quad (۳)$$

$$8\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$6\sqrt{3} \quad (۱)$$



$$12^2 = x(x+v) \xrightarrow{\sqrt{\quad}} x=9$$

$$AC^2 = v \times (v+x) \\ = v \times 16$$

$$AC = 8\sqrt{v}$$

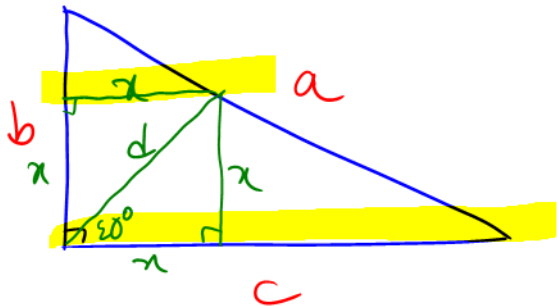
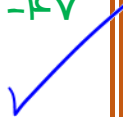
۱۴۷- در مثلثی به اضلاع ۳، ۴ و ۵ طول نیمساز وارد بر ضلع بزرگتر، چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

$$\frac{9}{5} \text{ (۴)}$$

$$\frac{8}{5} \text{ (۳)}$$

$$\frac{13}{7} \text{ (۲)}$$

$$\frac{12}{7} \text{ (۱)}$$



$$\frac{x}{c} = \frac{b-x}{b} \rightarrow bx = cb - cx$$

$$x = \frac{bc}{b+c}$$

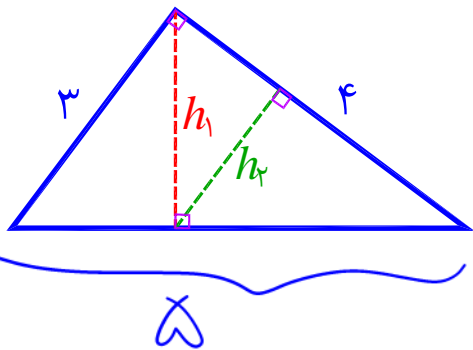
$$d = \sqrt{2}x \rightarrow d = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$$

$$d = \frac{12\sqrt{2}}{7} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

۷۲

۴۸- در شکل زیر، h_2 و h_1 ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت $\frac{h_2}{h_1}$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۱)



$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{h_2}{h_1} = k = \frac{3}{8}$$

۴۹- در مستطیلی به طول اضلاع $2\sqrt{7}$ و ۶ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این

(سراسری ریاضی فارج ۹۶)

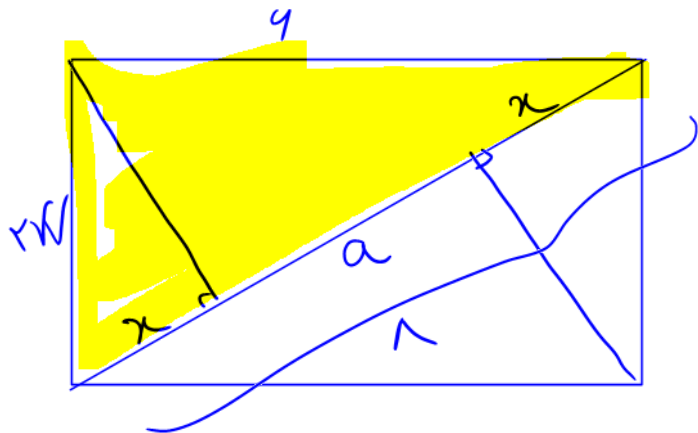
مستطیل رسم شده است. فاصله‌ی این دو خط عمود کدام است؟

۲ (۴)

۱/۷۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)



$$(2\sqrt{7})^2 = x \times a$$

$$\rightarrow x = \frac{10}{a}$$

$$a = 1 - 2x = 1 - 2 \times \frac{10}{a} = 1 - \frac{20}{a}$$

۵۰- در یک ذوزنقهی متساوی الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازهی قاعدهی بزرگتر و قطر آن به ترتیب ۱۰ و ۸ واحد باشند، اندازهی قاعدهی کوچکتر چند واحد است؟

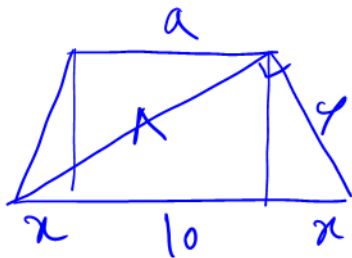
(سراسری ریاضی فارغ ۹۱)

$$3/2 \quad (2)$$

$$2/8 \quad (1)$$

$$4/2 \quad (4)$$

$$3/6 \quad (3)$$



$$g^2 = x \times 10 \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$a = 10 - 2x = 10 - \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$$

۵- در یک شش ضلعی منتظم، مجموع طول قطرهای کوچک، چند برابر مجموع طول قطرهای

بزرگ است؟

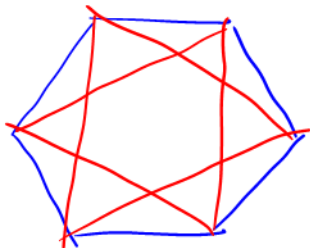
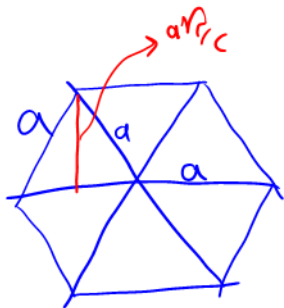
$9a$

$\sqrt{6} (۴)$

$\sqrt{3} (۳)$

$۲ (۲)$

$\sqrt{2} (۱)$



$4(a\sqrt{3})$