

کلاس مرور و جمع بندی

(نکته و تست)

ریاضیات تجربی / حسابان رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

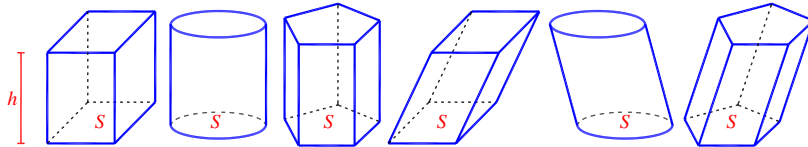
فصل نوزدهم: تفکر تجسمی، مقاطع مخروطی

مهر داد عباسپور

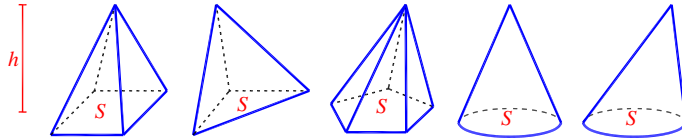
دوران حول محور

حجم‌های مهم

در شکل‌های منشوری: مساحت قاعده \times ارتفاع = حجم

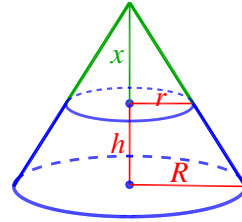
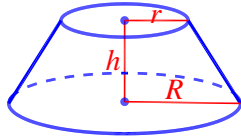


در شکل‌های هرمی: مساحت قاعده \times ارتفاع $\frac{1}{3}$ = حجم



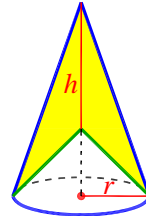
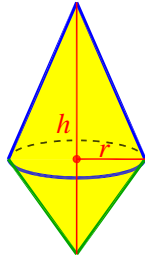
در کره به شعاع r : حجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ، مساحت $A = 4\pi r^2$

مخروط ناقص : $V = \frac{1}{3}h \cdot (r^2 + rR + R^2)\pi$

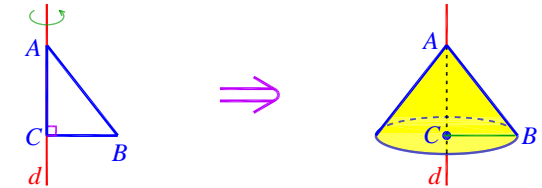
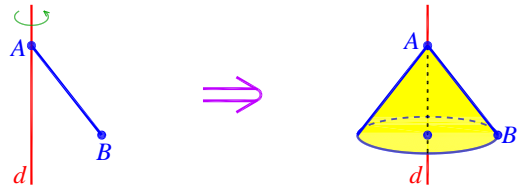
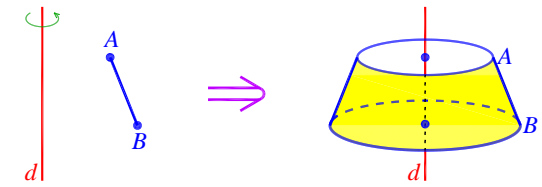
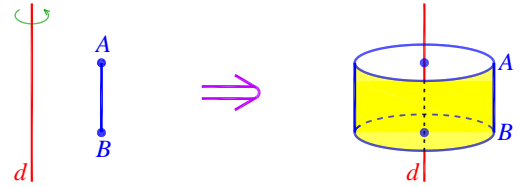
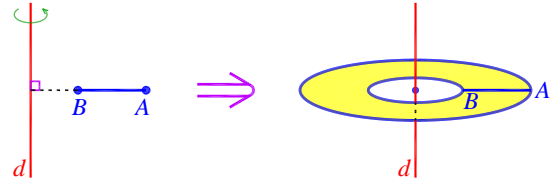
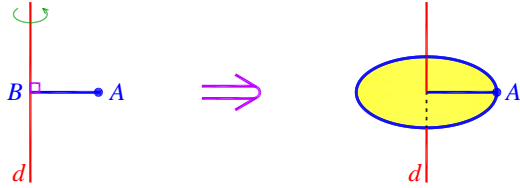


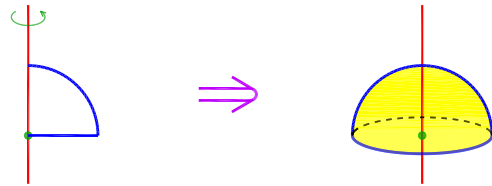
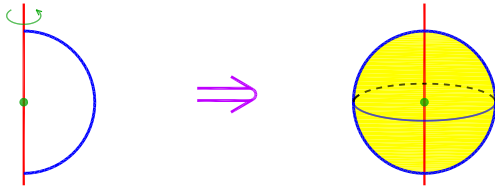
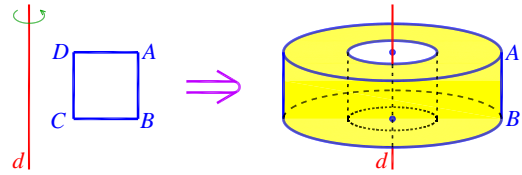
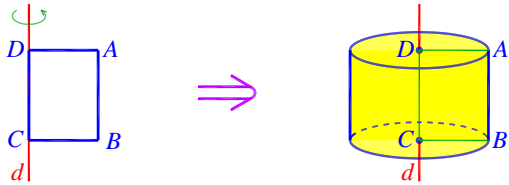
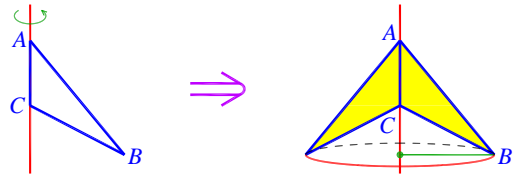
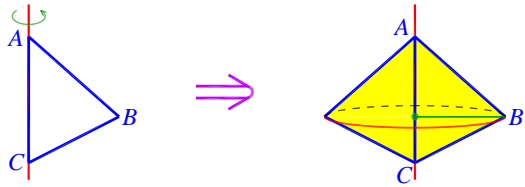
$$V = \frac{1}{3}h \cdot (r^2 \pi)$$

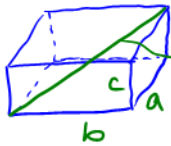
جمع و تفریق دو مخروط با قاعده‌های یکسان:



دوران حول یک محور





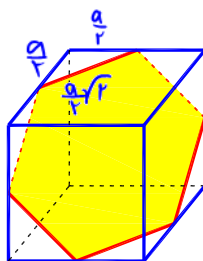
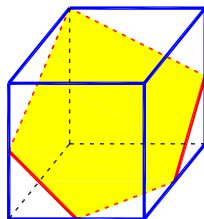
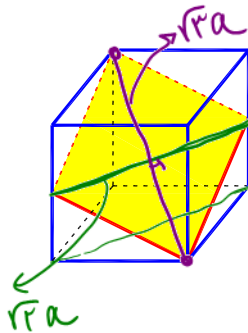
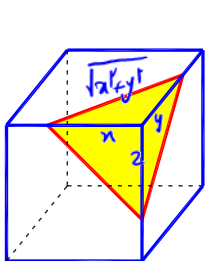
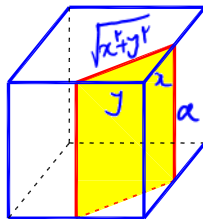
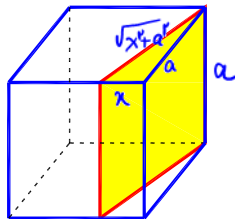
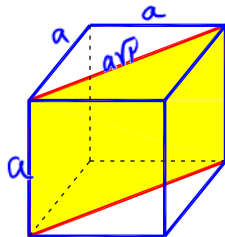
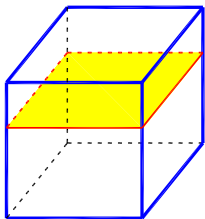


$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

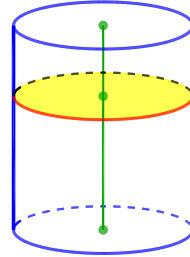
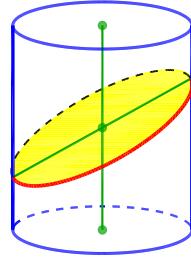
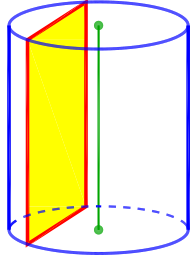
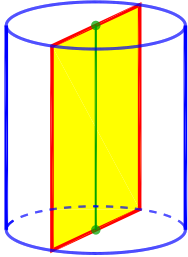
برش، مقاطع مخروطی

$$a = b = c \rightarrow d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$$

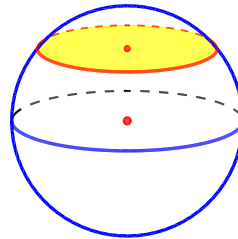
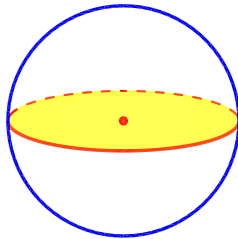
سطح مقطع صفحه با مکعب



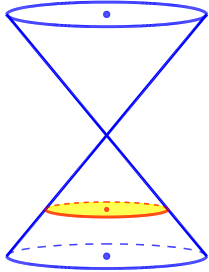
سطح مقطع صفحه با استوانه



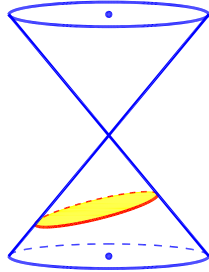
سطح مقطع صفحه با کره



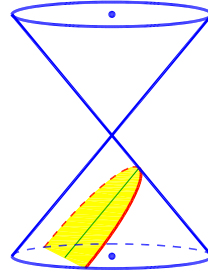
مقاطع مخروطی



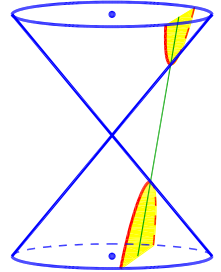
دایره



بیضی



پاره

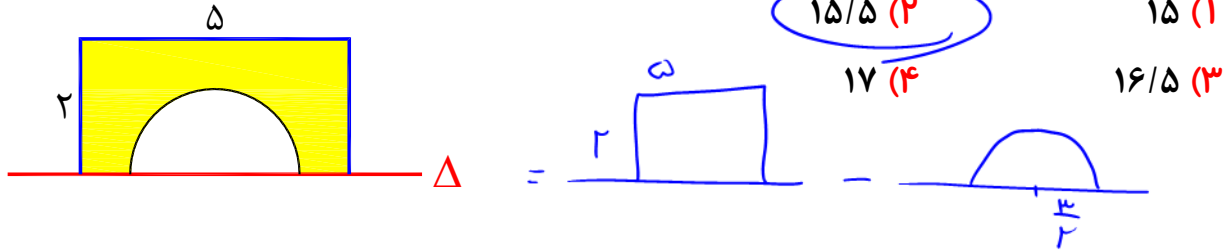


هذلولی

۱- سطح محدود به مستطیل 5×2 و نیم دایره به قطر ۳ واحد، حول خط Δ دوران می کند. حجم

(سراسری ریاضی ۹۶)

جسم حاصل، چند برابر π است؟



$$V = (\pi \times 2^2) \times 2 - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 20\pi - \frac{9\pi}{2} = 15.5\pi$$

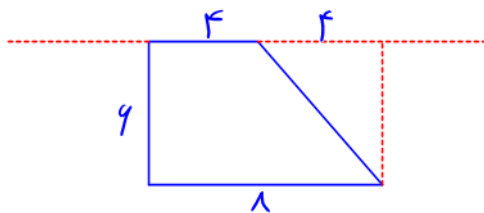
۲- ذوزنقهی قائم الزاویه که طول دو قاعده ۴ و ۸ و اندازهی ساق قائم آن ۶ واحد است را حول قاعدهی کوچکتر دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چند برابر π است؟

۲۴۰ (۴)

۲۲۰ (۳)

۲۰۰ (۲)

۱۸۰ (۱)



$$V = \pi \times 4^2 \times 8 - \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 6$$

$$= 288\pi - 81\pi = 207\pi$$

۳- یک مثلث قائم الزاویه با زاویه 30° درجه و طول وتر ۸ واحد، حول وتر خود دوران می کند.

(سراسری ریاضی فارج ۹۶)

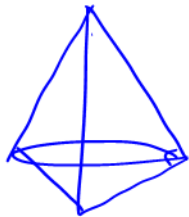
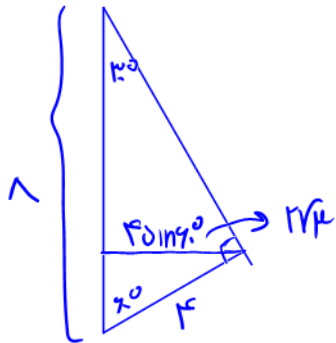
حجم جسم حاصل، چند برابر π است؟

۴۰ (۴)

۳۶ (۳)

۳۲ (۲)

۲۴ (۱)



$$\begin{cases} r = 2\sqrt{3} \\ h = 1 \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{2} \pi (2\sqrt{3})^2 \times 1 = 32\pi$$

۴- در مکعب مفروض، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال دیگر گذشته است. مساحت مقطع حاصل،

(سراسری ریاضی فارغ ۹۱)

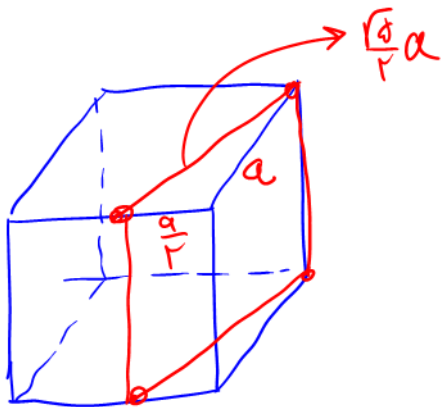
چند برابر مساحت یکی از وجوه مکعب است؟

$$\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (۱)$$



$$\frac{S}{S_1} = \frac{a \times \frac{\sqrt{5}}{2} a}{a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

۵- در یک مکعب به طول یال ۴ واحد، بر انتهای ۳ یال گذرا بر یک رأس، صفحه‌ای می‌گذرد.

مساحت مقطع این صفحه با کدام مکعب است؟

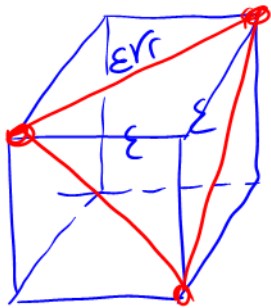
(سراسری تیربی ۹۵)

$۸\sqrt{۳}$ (۴) ✓

۱۲ (۳)

$۴\sqrt{۶}$ (۲)

۸ (۱)



$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (4)^2 = 4\sqrt{3}$$

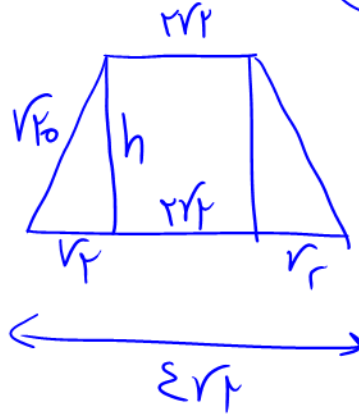
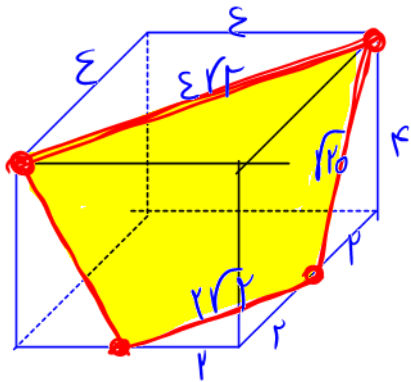
۶- مکعبی به ضلع ۴ داریم. صفحه‌ای شامل یکی از قطرهای یکی از وجه‌های این مکعب، که از وسط دو یال این مکعب می‌گذرد، آن را برش داده است. مساحت سطح مقطع حاصل برابر کدام است؟

$$18\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$12\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$18 \quad (۲)$$

$$12 \quad (۱)$$



$$h^2 = 20 - 2 = 18$$

$$h = 3\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} (2\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$$

$$= 18$$

۱۴

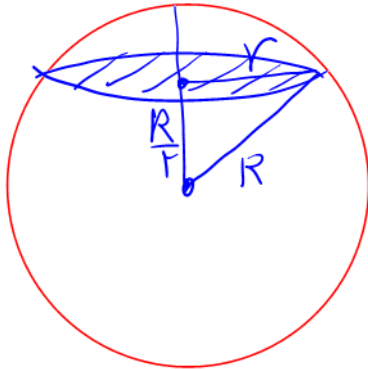
۷- یک کره داریم. یک صفحه عمود بر یکی از شعاع‌های آن و از وسط آن گذشته و کره را قطع می‌کند. مساحت کره، چند برابر مساحت سطح مقطع حاصل است؟

۵ (۱)

$$\frac{5}{3} (۲)$$

$$\frac{5}{3} (۳)$$

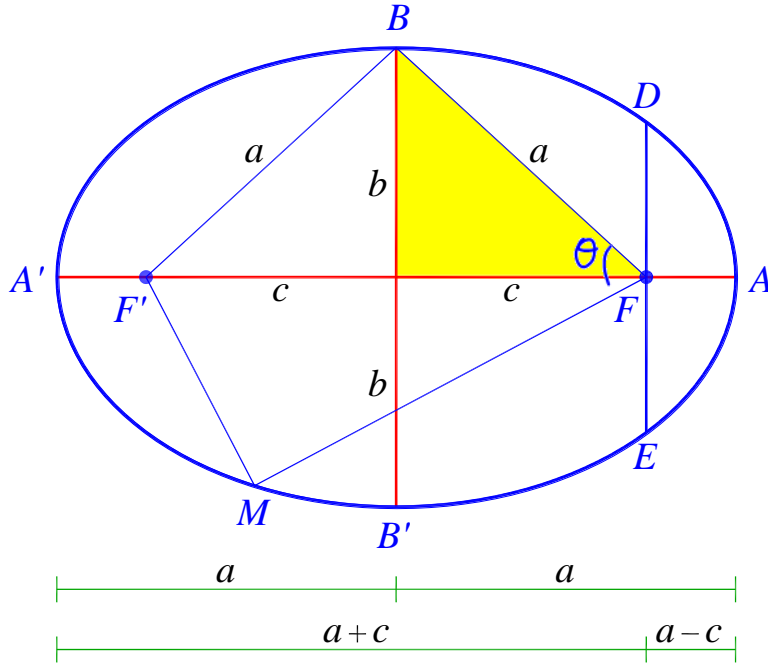
۶ (۴)



$$r^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}$$

$$\frac{S_{\text{مقطع}}}{S_{\text{کره}}} = \frac{\pi r^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{4} \frac{R^2}{R^2} = \frac{3}{4} \frac{\epsilon}{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

بیضی



$$MF + MF' = 2a$$

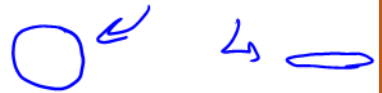
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$DE = \frac{2b^2}{a}$$

$$e = \frac{c}{a} = \cos \theta$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$0 < e < 1$$



۸- در یک بیضی به کانون‌های $(2, -1)$ و $(2, 7)$ ، اندازه‌ی قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز

این بیضی کدام است؟

(سراسری تیرپی ۹۸)

$$\bullet / ۸ \text{ (۴)}$$

$$\bullet / ۷۵ \text{ (۳)}$$

$$\bullet / ۶۴ \text{ (۲)}$$

$$\bullet / ۶ \text{ (۱)}$$

$$2c = 7 - (-1) \rightarrow c = 4$$

$$\rightarrow a = 5 \rightarrow e = \frac{c}{a}$$

$$2b = 6 \rightarrow b = 3$$

۹- در یک بیضی با خروج از مرکز $0/2$ ، فاصله‌ی کانون از یک سر قطر بزرگ بیضی که از آن دورتر است برابر ۱۲ است. طول وتری از بیضی که بر قطر بزرگ عمود است و از یکی از کانون‌ها می‌گذرد چقدر است؟

$$19/6 \quad (4)$$

$$19/2 \quad (3)$$

$$19 \quad (2)$$

$$18/8 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow a = 2c \\ a + c = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} c = 2 \\ a = 10 \end{array} \rightarrow b = \sqrt{96}$$

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 96}{10} = 19,2$$

۱۰- در یک بیضی با خروج از مرکز $8/10$ و قطر کوچک 12 واحد، مثلثی که رئوس آن دو کانون و نقطه‌ی دلخواهی روی محیط بیضی است را در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد این مثلث صحیح است؟

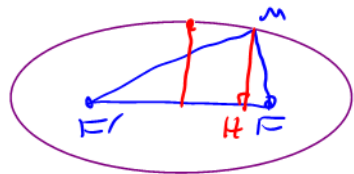
(۲) حداقل مساحت 12

(۱) حداکثر مساحت 24

(۴) محیط برابر 32

(۳) محیط برابر 36 ✓

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \\ 2b = 12 \rightarrow b = 6 \end{cases} \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 6^2 + \left(\frac{4}{5}a\right)^2 \Rightarrow a = 10, c = 8$$



$$MF + MF' = 2a = 20$$

$$P_{MFF'} = 2a + 2c = 34$$

$$MH \leq b = 6$$

$$S_{MFF'} \leq \frac{1}{2} \times 4 \times 14 = 28$$

۱۱- در یک بیضی به اقطار $2\sqrt{5}$ و 2 واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع 2 واحد، بیضی را در نقطه‌ی M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی کدام است؟

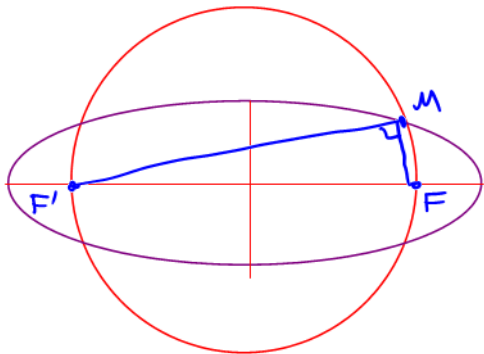
(سراسری ریاضی ۹۸)

۱۶ (۲) ✓

۱۲ (۱)

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)



$$\begin{cases} 2a = 2\sqrt{5} \\ 2b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{5} \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow c = 2$$

$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = 2^2 = 4$$

۱۲- یک بیضی به قطرهای $AA' = 14$ و $BB' = 4\sqrt{6}$ و کانون F نزدیک به نقطه A ، مفروض است. خط عمود بر قطر AA' از نقطه F ، دایره به قطر AA' را در نقطه M قطع می‌کند. اندازه پاره خط AM ، کدام است؟

(سراسری ریاضی قاج ۹۹)

$$2\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$2\sqrt{6} \quad (۳)$$

$$2\sqrt{7} \quad (۲)$$

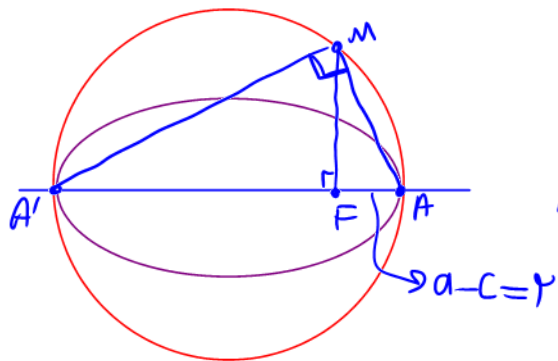
$$۷ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} 2a = 14 \\ 2b = 4\sqrt{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 2\sqrt{6} \end{cases} \rightarrow c = 5$$

$$\Delta_{MAA'} : MA^2 = AF \times AA'$$

$\underbrace{\quad}_c \quad \underbrace{\quad}_{2a=14}$

$$MA^2 = 21 \rightarrow MA = 2\sqrt{7}$$



دایره

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$$

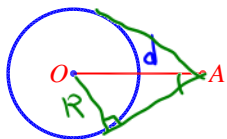
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$$

$$O(2, -1) \quad R = \sqrt{1}$$

معادله‌ی دایره‌ی به مرکز O و شعاع R :

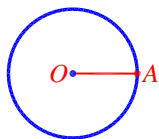
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

وضع نقطه با دایره



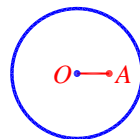
$$d > R \Rightarrow f(A) > 0$$

نقطه‌ی A بیرون دایره است.



$$d = R \Rightarrow f(A) = 0$$

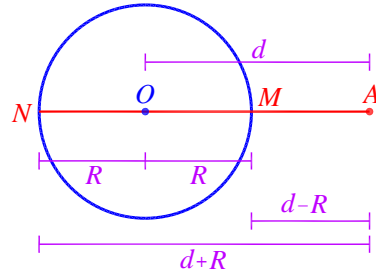
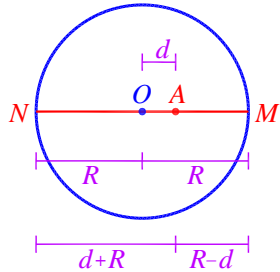
نقطه‌ی A روی محیط دایره است.



$$d < R \Rightarrow f(A) < 0$$

نقطه‌ی A درون دایره است.

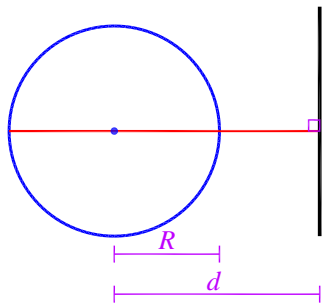
دورترین و نزدیکترین فاصله‌ی یک نقطه تا محیط دایره



دورترین فاصله : $d + R$

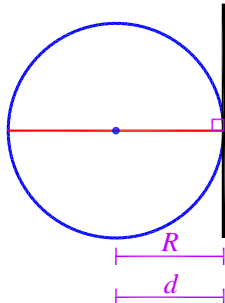
نزدیکترین فاصله : $|d - R|$

وضع خط با دایره

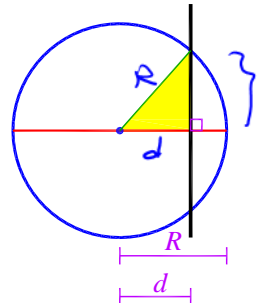


$d > R \Rightarrow$ خط و دایره غیر متقاطع

در این حالت دورترین و نزدیکترین فاصله نقاط محیط دایره تا خط $d \pm R$ است.



$d = R \Rightarrow$ خط بر دایره مماس

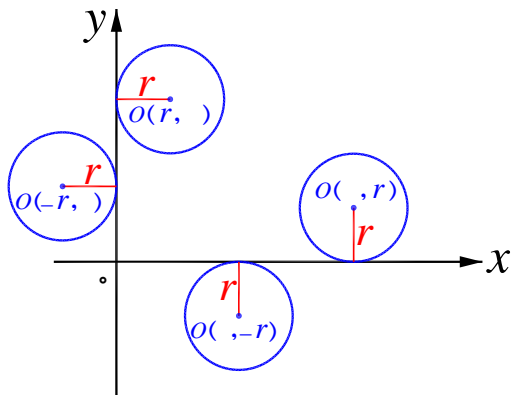


$d < R \Rightarrow$ خط و دایره در دو نقطه متقاطع

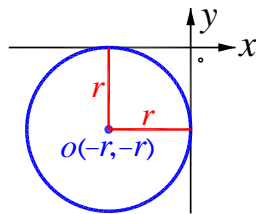
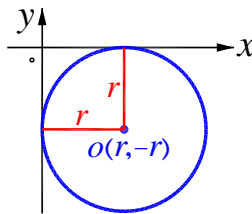
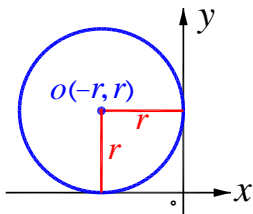
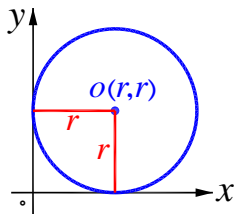
در این حالت طول وتر ایجاد شده توسط دایره روی خط را می‌توان به کمک رابطه فیثاغورس در مثلث سایه زده پیدا کرد.

دایره مماس بر محورهای مختصات

دایره‌ای که بر یکی از محورهای مختصات مماس باشد،
 قدرمطلق x یا y مرکزش برابر شعاع دایره است.



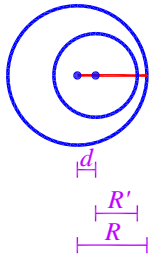
بنابراین دایره‌ی مماس بر هر دو محور مختصات، قدرمطلق x و y مرکز آن برابر شعاع دایره است. در واقع مرکز آن روی نیمساز یکی از ربع‌های مختصات است.



وضع نسبی دو دایره

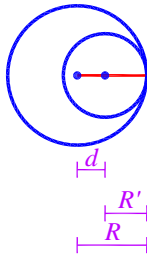
باید فاصله‌ی دو مرکز (d) را با جمع و تفریق شعاع‌ها (R و R') مقایسه کنیم.

دو دایره متداخل



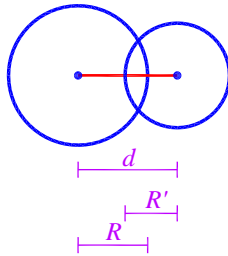
$$d < |R - R'|$$

دو دایره مماس درونی



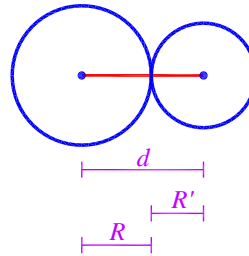
$$d = |R - R'|$$

دو دایره متقاطع



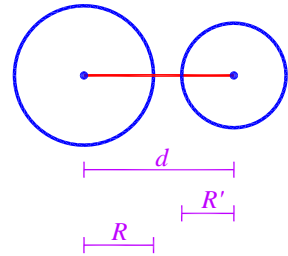
$$|R - R'| < d < R + R'$$

دو دایره مماس بیرونی



$$d = R + R'$$

دو دایره خارج هم (متخارج)



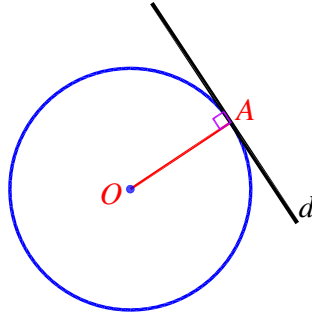
$$d > R + R'$$

مماس و قائم بر دایره

نقطه‌ی A را روی دایره‌ای به مرکز O را در نظر بگیرید.

خطی که در نقطه‌ی A بر OA عمود شود، خط مماس بر دایره است.

خط OA نیز خط عمود (قائم) بر دایره است. در واقع هر خط عمود بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد.



۱۳- از نقطه‌ی $A = (5, 5)$ دو مماس به طول‌های ۶ بر دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y = k$ رسم شده است. مقدار k کدام است؟

۲۱ (۴)

۲۲ (۳)

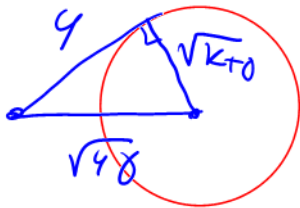
۲۳ (۲)

۲۴ (۱) ✓

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = k + 5$$

$$O(1, -2), A(5, 5) \rightarrow d = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$$

$$R = \sqrt{k+5}$$



$$48 = 4^2 + k + 5$$

$$k = 39$$

۲۸

۱۴- دایره‌ی در ناحیه اول دستگاه مختصات بر محورهای مختصات و خط $3x + 4y = 12$ مماس

(آزمون سنبلش ۱۴۰۰)

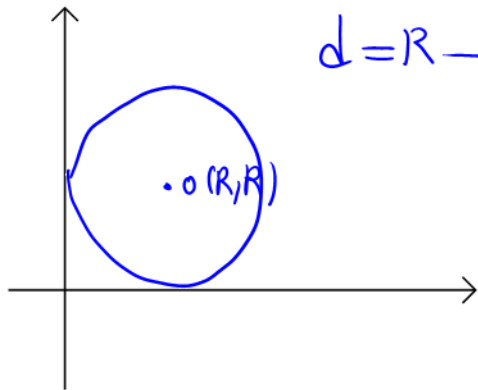
است. طول شعاع دایره کدام است؟

۶، ۱ (۴)

۵، ۲ (۳)

۵، ۱ (۲)

۶، ۲ (۱)



$$d = R \rightarrow \frac{|3R + 4R - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = R$$

$$|7R - 12| = 5R$$

$$7R - 12 = \pm 5R$$

$$R = 6$$

۱۵- دورترین فاصله‌ی نقاط محیط دایره‌ی $x^2 + y^2 + a = 4(x+y)$ تا خط $x+2y+9=0$

برابر $5\sqrt{5}$ است. مقدار a برابر کدام است؟

-۶ (۴)

-۸ (۳)

-۱۰ (۲)

-۱۲ (۱)



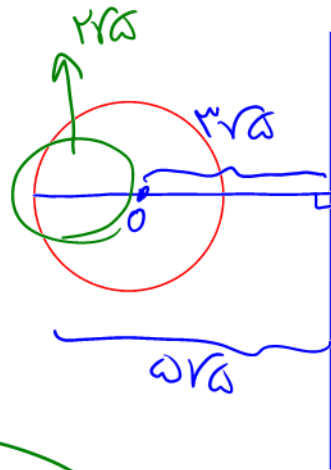
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 - a$$

$$O(2, 2) \quad R = \sqrt{1-a}$$

$$\hookrightarrow d = \frac{|2+2(2)+9|}{\sqrt{1+4}} = \frac{15}{\sqrt{5}}$$

$$d = 3\sqrt{5}$$

$$R = \sqrt{1-a} = 3\sqrt{5} \rightarrow a = -12$$



۳۰

۱۶- دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ و $x^2 + y^2 + 4x - 2y = a$ مماس بیرونی اند.

مقدار a کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 1 \quad \text{O}(2, -2) \quad R=1$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = a+8 \quad \text{O}'(-2, 1) \quad R' = \sqrt{a+8}$$

$$d = \sqrt{\varepsilon^2 + \mu^2} = \varepsilon$$

$$d = R + R' \rightarrow \varepsilon = 1 + R' \rightarrow R' = \varepsilon \rightarrow \sqrt{a+8} = \varepsilon$$

$$\rightarrow a = 11$$

۱۷- دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 + 4y = 6$ و $(x-a)^2 + y^2 = 1$ متداخل‌اند. بیشترین عدد صحیح a کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

$$(x-a)^2 + y^2 = 1 \quad O(a, 0) \quad R=1$$

$$x^2 + (y+2)^2 = 7 \quad O'(0, -2) \quad R'=1$$

$$d = \sqrt{a^2 + 4}$$

$$d < |R - R'| \rightarrow \sqrt{a^2 + 4} < 1 - 1 \rightarrow a^2 + 4 < 0$$

$$a^2 < -4 \rightarrow \boxed{a = 9}$$

۱۸- فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x, y)$ از نقطه‌ی $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات است.

(سراسری تیربی ۹۷)

بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

$$4\sqrt{5} \quad (4)$$

$$4\sqrt{3} \quad (3)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow$$

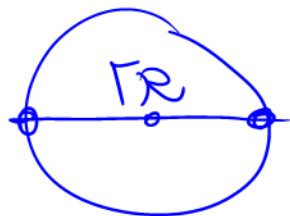
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 4x^2 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y = 27$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y = 9$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 6 \quad R = \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$$

۳۳



۱۹- شعاع دایره‌ی گذرنده از نقاط $A = (۴, -۴)$ ، $B = (-۱, -۳)$ و $C = (۵, ۱)$ کدام است؟

۵ (۴)

$\sqrt{۱۷}$ (۳)

$\sqrt{۱۳}$ (۲)

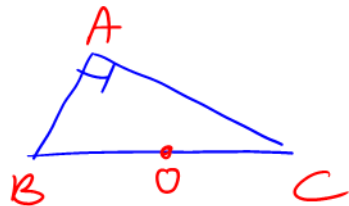
$\sqrt{۱۰}$ (۱)

$$m_{AB} = \frac{1}{-5}$$

$$m_{AC} = +5$$

$$m_{BC} = \frac{4}{9}$$

$$\rightarrow m_{AB} \cdot m_{AC} = -1 \rightarrow$$



$$R = \frac{1}{2} |BC|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{9^2 + 4^2} = \sqrt{13}$$

۲۰- دایره‌ای که مرکز آن بر خط $y = 2x$ واقع است بر خطوط $y = x + 1$ و $x + y = 7$ مماس است.

شعاع این دایره کدام می‌تواند باشد؟

$$2\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$2\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$\sqrt{2} \quad (۱)$$

$$O(\alpha, 2\alpha) \quad R = \frac{|y - x - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x + y - 7|}{\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{|2\alpha - \alpha - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|2\alpha + \alpha - 7|}{\sqrt{2}} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha - 1 = 2\alpha - 7 \rightarrow \alpha = 3 \rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{2}} = r_c \\ \alpha - 1 = -3\alpha + 7 \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}} = r_c/c \end{array} \right.$$

۳۵

آزمون:

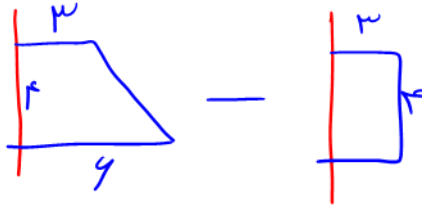
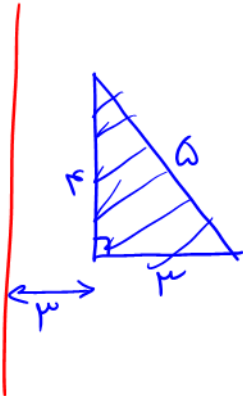
۲۱- مثلثی به اضلاع ۳، ۴ و ۵ را حول خطی به موازات ضلع به طول ۴ و به فاصله‌ی ۳ واحد از آن دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟

$$48\pi \quad (4)$$

$$42\pi \quad (3)$$

$$40\pi \quad (2)$$

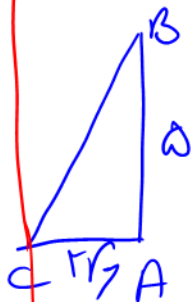
$$36\pi \quad (1)$$



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 4 \times (\pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 3 \cdot 4) - \pi \times 3^2 \times 4 \\ &= 14\pi - 36\pi = -22\pi \end{aligned}$$

۲۲- حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه ABC با ضلع‌های قائم AB و AC ، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و $۲\sqrt{۶}$ واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB ، کدام است؟

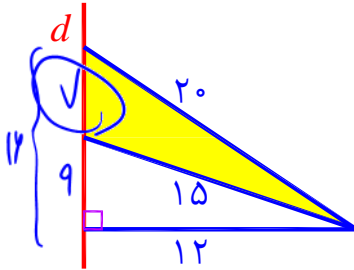
(سراسری ریاضی ۹۹)



$$\begin{aligned}
 &= \text{Volume of cylinder} - \text{Volume of cone} \\
 &= \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi r^2 h \\
 &= \frac{2}{3} \pi (2\sqrt{6})^2 \times 5 \\
 &= 10\pi
 \end{aligned}$$

70π (۲) 60π (۱)
 80π (۴) 75π (۳)

۲۳- در شکل روبه‌رو، حجم حاصل از دوران شکل سایه زده حول خط d ، چقدر است؟



$$300\pi \quad (2)$$

$$288\pi \quad (1)$$

$$336\pi \quad (4)$$

$$324\pi \quad (3)$$

$$V = \frac{1}{2} \pi \times 14^2 \times 14 - \frac{1}{2} \pi \times 12^2 \times 9$$

$$= \frac{1}{2} \pi \times 14^2 (14 - 9)$$

$$= 81\pi \times 4$$

$$= 324\pi$$

۲۴- در یک مکعب، صفحه‌ی گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم

(سراسری ریاضی ۹۸)

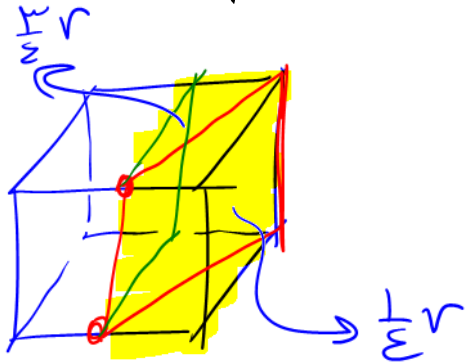
می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (۳)$$

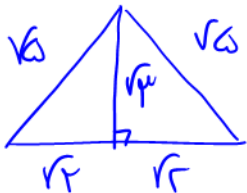
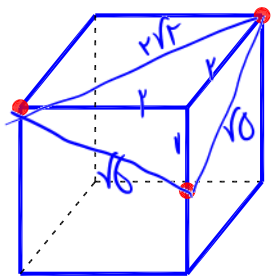
$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$



۲۵- در شکل روبه‌رو، مکعبی به ضلع ۲ و سه نقطه مشخص شده‌اند که یکی از آنها وسط یک یال مکعب است. مساحت سطح مقطع حاصل از برش این جسم توسط صفحه‌ی گذرا از این سه نقطه

چقدر است؟



$$\sqrt{3} \quad (2)$$

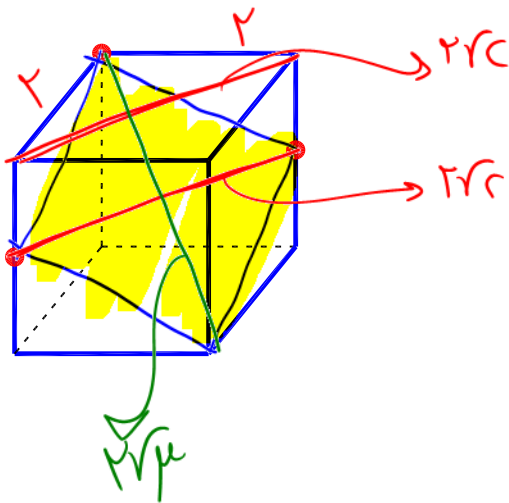
$$\sqrt{6} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$2\sqrt{3} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$$

۲۶- در شکل روبه‌رو، مکعبی به ضلع ۲ می‌بینید. دو تا از نقاط مشخص شده وسط یال‌ها هستند. مساحت شکل حاصل از سطح مقطع صفحه‌ی گذرنده از سه نقطه‌ی مشخص شده با مکعب، برابر



چقدر است؟

$$\sqrt{6} \quad (1)$$

$$2/5 \quad (2)$$

$$5 \quad (4)$$

$$2\sqrt{6} \quad (3)$$

$$S = \frac{c\sqrt{c} \times c\sqrt{c}}{c} = 2\sqrt{6}$$

۲۷- یک استوانه توپر به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۱۲ داریم. یک مخروط که قاعده آن یکی از قاعده‌های استوانه است و رأس مخروط، مرکز قاعده‌ی دیگر استوانه است را از آن حذف می‌کنیم. صفحه‌ای به موازات قاعده‌ی مخروط و به فاصله‌ی ۸ واحد از آن این جسم را برش می‌زند. مساحت سطح مقطع حاصل چقدر است؟

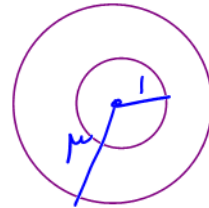
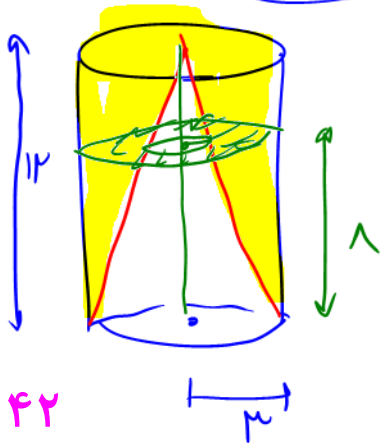
$$8\pi \quad (4)$$

$$7\pi \quad (3)$$

$$6\pi \quad (2)$$

$$5\pi \quad (1)$$

$$\frac{r}{3} = \frac{8}{12} \rightarrow r = 1$$



$$S = 3^2\pi - 1^2\pi = 8\pi$$

۲۸- در یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{2}{3}$ ، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک، با کدام زاویه

رؤیت می شود؟

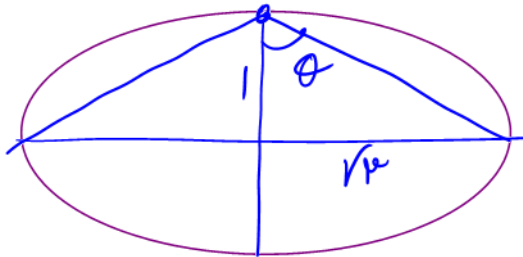
(سراسری ریاضی خارج ۹۱)

۱۵۰° (۴)

۱۲۰° (۳)

۹۰° (۲)

۶۰° (۱)



$$\frac{c}{a} = \frac{r_1}{r_2} \rightarrow \begin{cases} c = r_1 \\ a = r_2 \end{cases}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 1$$

$$\tan \theta = \sqrt{3} \rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$2\theta = 120^\circ$$

۲۹- در یک بیضی مختصات یک سر قطر بزرگ $A = (۸, ۰)$ و کانون نزدیک به آن $F = (۴, ۰)$ است.

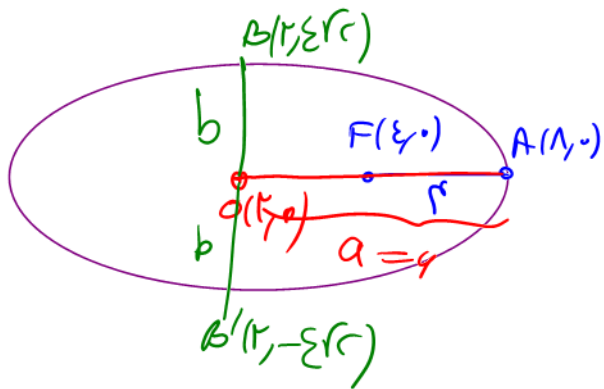
اگر خروج از مرکز برابر $\frac{1}{3}$ باشد، مختصات یکی از دو سر قطر کوچک این بیضی کدام است؟

(۴) $(۳, ۶\sqrt{۲})$

(۳) $(۳, ۳\sqrt{۲})$

(۲) $(۲, ۴\sqrt{۲})$

(۱) $(۲, ۲\sqrt{۲})$



$$\begin{aligned}
 a - c &= e \\
 e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} &\rightarrow a = 3c \\
 \left. \begin{aligned} a &= 4 \\ c &= 2 \end{aligned} \right\} & \\
 a^2 &= b^2 + c^2 \rightarrow b = 6r
 \end{aligned}$$

۳۰- یک بیضی که طول قطرهای بزرگ و کوچک آن ۱۰ و ۶ است، با دایره به معادله‌ی

$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 11$ هم مرکز است. اگر یکی از نقاط تقاطع دایره و بیضی M باشد، فاصله‌ی M

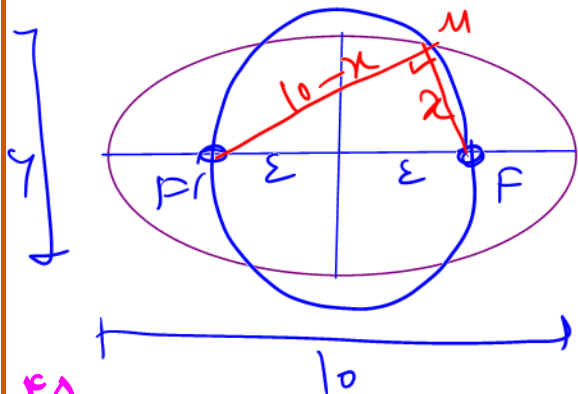
تا نزدیک‌ترین کانون بیضی چقدر است؟

$$5 - \sqrt{7} \quad (4)$$

$$5 - \sqrt{6} \quad (3)$$

$$5 - \sqrt{5} \quad (2)$$

$$5 - \sqrt{3} \quad (1)$$



۴۵

$$a = 5 \rightarrow c = \epsilon$$

$$b = 3$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 14$$

$$R = \epsilon$$

$$x^2 + (10-x)^2 = 1^2$$

$$x^2 - 10x + 11 = 0$$

$$x = 5 \pm \sqrt{6}$$

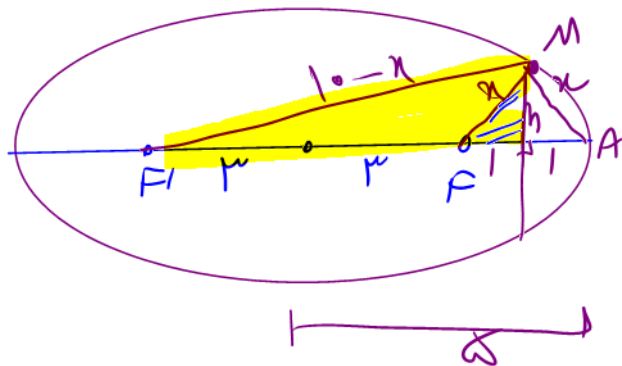
۱۳- دو نقطه‌ی F و F' در صفحه به فاصله‌ی ۶ واحد مفروض است. با نخی به طول ۱۰ که دو سر آن را روی F و F' قرار داده‌ایم، یک بیضی رسم کرده‌ایم. وتر MN از بیضی بر قطر بزرگ بیضی عمود است. فاصله‌ی M از یک سر قطر بزرگ بیضی و کانون نزدیک به آن برابر x است. مقدار x کدام است؟

۲/۷ (۴)

۲/۶ (۳)

۲/۵ (۲)

۲/۴ (۱)



$$2a = 10 \rightarrow a = 5$$

$$c = 3 \rightarrow b = 4$$

$$h^2 + v^2 = (10 - x)^2$$

$$h^2 + 1^2 = x^2$$

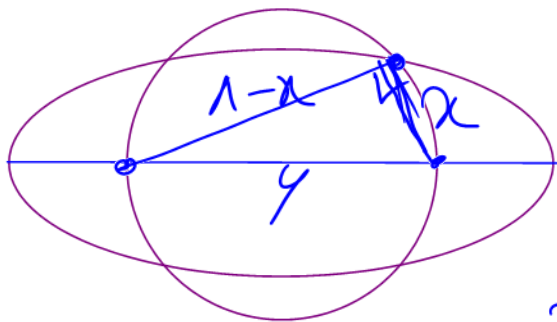
$$\begin{aligned} 16 - 1 &= 100 - 20x + x^2 - x^2 \\ x &= 2/4 \end{aligned}$$

۳۲- در یک بیضی به قطرهای ۸ و $2\sqrt{7}$ واحد و کانون‌های F و F' ، دایره‌ای به قطر $F'F$ بیضی را در نقطه M قطع می‌کند. فاصله نقطه M تا نزدیک‌ترین کانون، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۹)

$$2/5 \quad (2) \qquad 4 - 2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$3 \quad (4) \qquad 4 - \sqrt{2} \quad (3) \quad \checkmark$$



$$2a = 8 \rightarrow a = 4$$

$$2b = 2\sqrt{7} \rightarrow b = \sqrt{7}$$

$$c = 3$$

$$x^2 + (1-x)^2 = y^2$$

$$4\sqrt{7} \rightarrow a^2 - 1x + c = 0 \rightarrow x = 4 \pm \sqrt{7}$$

۳۳- دورترین فاصله نقاط محیط دایره $x^2 + y^2 - 4x = 0$ از نقطه $A = (1, k)$ برابر ۷ است.

مقدار k کدام است؟

$$2\sqrt{6} \quad (4)$$

$$2\sqrt{3} \quad (3)$$

$$3\sqrt{2} \quad (2)$$

$$2\sqrt{5} \quad (1)$$

$$O(2, 0) \quad R = 2$$

$$d + \frac{R}{2} = V \rightarrow d = 5$$

$$\sqrt{1+k^2} = 5 \rightarrow k = \pm \sqrt{24}$$

۳۴- دایره‌ی گذرا بر نقطه‌ی $(1, -2)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

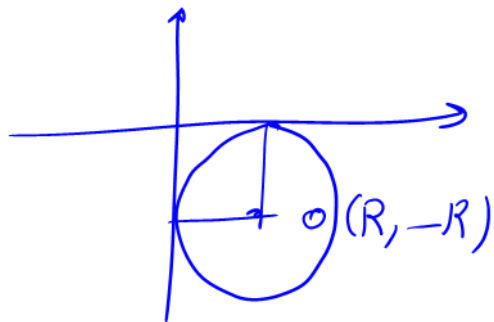
(سراسری تیرین فارغ ۹۷)

۱.۵ (۲)

۱.۴ (۱)

۲.۵ (۴)

۲.۴ (۳)



$$(x-R)^2 + (y+R)^2 = R^2$$

1 -2

$$R^2 - 4R + 0 = 0 \rightarrow R = 5$$

۳۵- نقطه‌ی $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ و تری به طول $2\sqrt{7}$ جدا

(سراسری تیربی فارغ ۹۱)

می‌کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

$$-1 \pm \sqrt{3} \quad (۴)$$

$$-1 \pm \sqrt{2} \quad (۳)$$

$$2, -4 \quad (۲)$$

$$3, -5 \quad (۱)$$

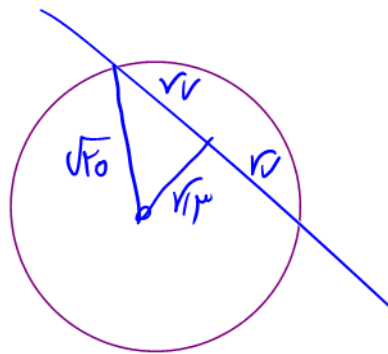
$$d = \frac{|-2 - 12 + 1|}{\sqrt{2+9}} = \sqrt{13}$$

$$R = \sqrt{10}$$

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 10$$

$$y = 2 \rightarrow (x+1)^2 = 14 \rightarrow x+1 = \pm\sqrt{14} \rightarrow x = -1 \pm \sqrt{14}$$

۵۰



۱۳۶- دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 = 2kx + 1$ و $x^2 + y^2 - 2y = 15$ مماس درونی هم هستند.

مقدار مثبت k کدام است؟

$$\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 14$$

$$O(0,1) \quad R = \sqrt{14}$$

$$(x-k)^2 + (y-0)^2 = 2k+1$$

$$O'(k,0) \quad R' = \sqrt{2k+1}$$

$$d = \sqrt{2k+1}$$

$$d = |R - R'| \rightarrow \sqrt{2k+1} = |\sqrt{2k+1} - \sqrt{14}|$$

$$\sqrt{2k+1} = \sqrt{14} - \sqrt{2k+1} \rightarrow \sqrt{2k+1} = \sqrt{14} \rightarrow 2k+1 = 14 \rightarrow k = \frac{13}{2}$$

۵۱

۳۷- دو دایره به معادله‌های $(x-1)^2 + (y-2)^2 = a$ و $x^2 + y^2 + 2y + 6x + 6 = 0$ متقاطع‌اند. برای

a چند جواب صحیح وجود دارد؟

۳۹ (۴)

۳۸ (۳)

۲۹ (۲)

۲۸ (۱)

$O(1, 2) \quad R = \sqrt{a}$
 $O'(-3, -1) \quad R' = 2$

$$d = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

$$|R - R'| < d < R + R' \rightarrow \sqrt{a} - 2 < 5 < \sqrt{a} + 2$$

$$-3 < \sqrt{a} - 2 < 3$$

$$-1 < \sqrt{a} < 5$$

۵۲

$$1 < \sqrt{a} < 5 \rightarrow 1 < a < 25$$

$10, 11, \dots, 24 \Rightarrow 15$

۳۸- کوچک ترین دایره گذرا بر دو نقطه $A(2,5)$ و $B(-4,1)$ ، محور x ها را با کدام طول قطع

(سراسری ریاضی ۹۹)

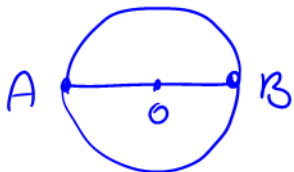
می کند؟

۳ و -۲ (۴)

۲ و -۱ (۳)

۰ و -۳ (۲)

۱ و -۳ (۱)



$$O = \frac{A+B}{2} = (-1, 3)$$

$$R = OA = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$$

$$y = 0 \rightarrow (x+1)^2 + 9 = 13 \rightarrow x+1 = \pm 2$$

۳۹- وتر مشترک دایره‌ی C با دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x = 6$ منطبق بر نیمساز ناحیه‌ی اول

است. اگر دایره‌ی C از نقطه‌ی $(-1, 4)$ بگذرد، معادله‌ی آن کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۸)

$$x^2 + y^2 + 2y - x = 6 \quad (۲)$$

$$x^2 + y^2 - y + 3x = 6 \quad (۱)$$

$$x^2 + y^2 - 3y - x = 6 \quad (۴)$$

$$x^2 + y^2 - 2y + x = 6 \quad (۳)$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\sqrt{(-1, 4)}$$

$$1 + 16 - a + 4b + (-4) = 0$$

$$(0 + \varepsilon)x + by + \underbrace{c + 4}_{0} = 0$$

$$a + \varepsilon = -b$$

$$c = -4$$

$$\Delta ۴ \quad \left. \begin{array}{l} a + b = -\varepsilon \\ -a + 4b = -11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -3 \end{array}$$

$$x^2 + y^2 - x - 3y - 4 = 0$$

۴۰- از بین دایره‌های گذرا از نقطه $A(1, -4)$ و مماس بر خط‌های $4x + 3y = 0$ و محور y ها،

(سراسری ریاضی ۹۹)

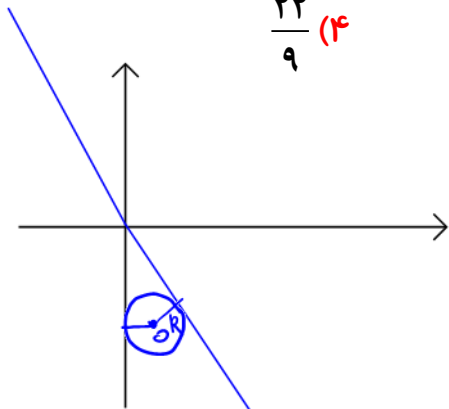
بزرگ‌ترین شعاع دایره، کدام است؟

$$\frac{22}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{17}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۱)$$



$$O(R, y) \rightarrow \frac{|4R + 3y|}{5} = R$$

$$4R + 3y = \pm 5R \rightarrow y = -R$$

$$O(R, -R)$$

$$(x-R)^2 + (y+R)^2 = R^2$$

$$9R^2 - 24R + 17 = 0 \rightarrow R = 1, 17/9$$

۵۵