



فصل چهارم

تعیین علامت و نامعادله

مطالب کلی

ویژگی‌های نامساوی :

$a > b \Rightarrow a + c > b + c$	$\begin{cases} a > b \Leftrightarrow ac > bc & (c > 0) \\ a > b \Leftrightarrow ac < bc & (c < 0) \end{cases}$
$\begin{cases} a > b \Rightarrow a^n > b^n \\ a > b \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \end{cases}$ <p>(n عدد طبیعی فرد)</p>	$\begin{cases} a > b \geq 0 \Rightarrow a^n > b^n \\ 0 > a > b \Rightarrow a^n < b^n \end{cases}$ <p>(n عدد طبیعی زوج)</p>
$a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ (n عدد طبیعی زوج)	$a > b \xrightarrow{ab > 0} \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \xrightarrow{bd > 0} \frac{a}{b} \cdot bd < \frac{c}{d} \cdot bd \Rightarrow ad < bc$	
$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$	$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$
$\begin{cases} x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a} \\ x^2 > a \Leftrightarrow x < -\sqrt{a}, x > \sqrt{a} \end{cases}$ <p>(a مثبت)</p>	$\begin{cases} x < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ x > a \Leftrightarrow x < -a, x > a \end{cases}$ <p>(a مثبت)</p>
$\begin{cases} x > 0 : x + \frac{1}{x} \geq 2 \\ x < 0 : x + \frac{1}{x} \leq -2 \end{cases}$	

دسته‌بندی تست‌ها :

استفاده از ویژگی‌های نامساوی‌ها

۱- اگر $0 < a < b$ باشد، کدام عدد حتماً مثبت است؟

۱) $2a - 3b$ ۲) $3a - 2b$ ۳) $2b - 2a$ ۴) $3b - 2a$

۲- اگر $-1 < x < 4$ باشد، برای $y = (3x - 2)^2$ چند مقدار صحیح وجود دارد؟

۱) ۷۴ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۱۲ ۴) ۱۹۶

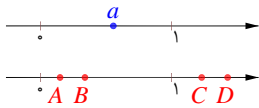


۲

$$a > 1 \Rightarrow 1 < \dots < \sqrt[3]{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3 < \dots$$

مقایسه‌ی توان‌های اعداد

$$0 < b < 1 \Rightarrow \dots < \sqrt[3]{b} < \sqrt{b} < b < b^2 < b^3 < \dots < 1$$



۳- عدد a روی محور بالا و اعداد a^2 ، a^3 ، $\frac{1}{\sqrt{a}}$ ، $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ در محور پایین مشخص شده‌اند. دو عدد $\frac{1}{\sqrt{a}}$ و $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

به ترتیب کدام‌اند؟

- (۱) A و C (۲) A و D (۳) B و C (۴) B و D

۳

حل نامعادلات درجه اول، درجه دوم و هموگرافیک

(۱) برای حل نامعادلات درجه اول به شیوه جبری عمل می‌کنیم.

(۲) برای حل نامعادله‌ی درجه دوم، به فرض اینکه دو ریشه دارد به نمودار آن نگاه می‌کنیم.

مثلاً برای حل $(x+2)(x-3) > 0$ ، توجه می‌کنیم که تابع سمت چپ یک سهمی رو به بالا با دو ریشه دارد. پس قسمت مثبت آن که مد نظر ماست، خارج دو ریشه یعنی $(-2 < x < 3)$ است.

(۳) برای حل نامعادله‌ی هموگرافیک، تقسیم را مثل ضرب می‌گیریم.

مثلاً جواب نامعادله‌ی $\frac{x-2}{2x-1} < 0$ با جواب نامعادله‌ی $(x-2)(2x-1) < 0$ یکسان است. فقط مواظب ریشه‌ی مخرج باشید. جواب بین دو ریشه یعنی $\frac{1}{2} < x < 2$ است.

۴- اگر $1 - 4\sqrt[3]{x} - 4 < 3\sqrt[3]{x} + 1 < 4\sqrt[3]{x} - 4$ باشد، برای x چند مقدار طبیعی وجود دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۱۸

۵- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ ، در بازه‌ی (a, b) پایین‌ترین تر از خط به معادله‌ی $y = 2$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(سراسری ۸۸)

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ∞

۶- برای هر x در بازه‌ی (a, b) عبارت $\sqrt{\frac{2-x}{4+x}} + \sqrt{25 - (1-2x)^2}$ تعریف شده است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۴

۴

روش کلی تعیین علامت

(۱) با فرض اینکه صورت و مخرج چندجمله‌ای‌های تجزیه شده هستند، ریشه‌ها را در جدول قرار می‌دهیم، یکی از خانه‌ها را با عدد گذاری تعیین علامت می‌کنیم (معمولاً خانه‌ی $+\infty \rightarrow x$ مناسب است). سپس علامت‌ها یک در میان عوض می‌شوند مگر ریشه‌هایی که در تجزیه توان زوج دارند. مثلاً:

$$f(x) = \frac{(x-1)(3-x)}{(x-2)^2(x+1)} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & + & || & - & + & || & + & - \end{array} \quad (x \rightarrow +\infty : f(x) < 0)$$

(۲) عبارت‌های همواره مثبت را کنار بگذارید! فقط مواظب ریشه‌ی آنها باشید.

۷- چند عدد طبیعی در نامعادله‌ی $(x-3)(x^2 - 11x + 24) < 0$ صدق می‌کند؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵

۸- با فرض $x > 4$ ، جواب نامعادله‌ی $x < \frac{x+18}{10-x}$ ، بازه‌ی (a, b) است. مقدار $b - a$ چقدر است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۵

حل نامعادله به کمک رسم

۹- اگر برای هر x از بازه‌ی (a, b) نامعادله‌ی $\sqrt{2x+4} > x+1$ برقرار باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $1+\sqrt{3}$ (۴) $2+\sqrt{3}$

۶

نامعادلات همواره برقرار

وقتی می‌خواهیم یک نامعادله (معمولاً درجه دوم) همواره برقرار (برای هر x درست) باشد، کافی است به نمودار تابع آن نگاه کنیم. نیازی به حفظ کردن چیزی نیست!!

(سراسری ۸۹)

۱۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ در بالای محور x هاست؟

- (۱) $a < -1$ (۲) $a > 1$ (۳) $a > 2$ (۴) $1 < a < 2$

آزمون ۱

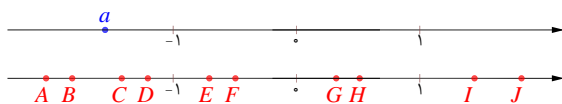
۱۱- از نامساوی‌های $3x + 2y > 7$ و $9 + 3y > 2x$ کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

- (۱) $y > -1$ (۲) $y < -1$ (۳) $x > 3$ (۴) $x < 3$

۱۲- اگر $a < b < 0$ و $c < d < 0$ باشد، کدام عدد بزرگتر است؟

- (۱) $a - 2d$ (۲) $b - 2c$ (۳) $a - 2d$ (۴) $b - 2c$

۱۳- عدد a روی محور بالا و اعداد a^2 ، a^4 ، $\sqrt[3]{a}$ ، $\sqrt[5]{a}$ در محور پایین مشخص شده‌اند. دو عدد a^4 و $\sqrt[5]{a}$ به ترتیب کدام‌اند؟



- (۱) E و J (۲) D و J
(۳) E و H (۴) D و H

۱۴- جواب نامعادله‌ی $1 - \frac{5}{x} < 2 - \frac{4}{x} < \frac{5}{x}$ بازه‌ی (a, b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(سراسری ۸۳)

۱۵- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $x < 3$ (۲) $1 < x < 3$ (۳) $2 < x < 3$ (۴) $-2 < x < 3$

۱۶- برای هر x در بازه‌ی (a, b) نامعادله‌ی $x^2 - 2x - x^2 < 4 - 2x - x^2$ برقرار است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۴

۱۷- مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \leq 0$ را در نظر بگیرید. کوچکترین عضو مثبت آن را a و بزرگترین عضو منفی آن را b می‌نامیم.

مقدار $a-b$ کدام است؟

- (۱) فاقد عضو مثبت (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸- برای هر x در بازه‌ی (a, b) ، نمودار تابع $f(x) = \frac{x-2}{x-4}$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = \frac{5x-1}{x+3}$ قرار می‌گیرد. بیشترین مقدار $b-a$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲,۵ (۳) ۳,۵ (۴) ۴,۵

۱۹- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\sin(\pi x) > 4x - 1$ کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{2}, 1)$ (۲) $(0, \frac{1}{2})$ (۳) $(-\infty, \frac{1}{2})$ (۴) $(\frac{1}{2}, +\infty)$

۲۰- به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y = (m+2)x^2 - 2mx$ همواره در بالای خط $y = -1$ است؟

- (۱) $m > -2$ (۲) $-2 < m < -1$ (۳) $-2 < m < 2$ (۴) $-1 < m < 2$



آزمون ۲

۲۱- اگر a و b اعداد مثبت و c عدد منفی باشد و $b^2 > c^2 > a^2$ ، کدام یک از اعداد زیر الزاماً مثبت است؟

(۱) $b+c$ (۲) $a-b+c$ (۳) $a+c$ (۴) b^2+c

۲۲- اگر $x^2 > 9$ باشد، در برد تابع $y = \frac{8}{x+1}$ چند مقدار صحیح وجود دارد؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۳- اگر $a > 1$ و $0 < b < 1$ باشد، کدام عدد از همه کوچکتر است؟

(۱) $\sqrt[3]{a-b^3}$ (۲) $\sqrt[3]{a-b^5}$ (۳) $\sqrt[3]{a-b^2}$ (۴) $\sqrt[3]{a-b^5}$

۲۴- در بازه‌ی $[x_0, +\infty)$ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$ بالاتر از خط به معادله‌ی $y = 3(x-1)$ قرار نمی‌گیرد، کمترین مقدار $f(x_0)$ کدام است؟

(سراسری ۸۲)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(سراسری ۸۹)

۲۵- مقادیر تابع $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ ، در بازه‌ی (a, b) بزرگتر از $\frac{1}{4}$ می‌باشد. بیشترین مقدار $b-a$ ، کدام است؟

(۱) ۵,۵ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۶

(سراسری ۹۶)

۲۶- اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه‌ی مقادیر x در کدام بازه است؟

(۱) $[\frac{2}{3}, 2]$ (۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ (۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$ (۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

(سراسری ۸۴)

۲۷- جواب نامعادله‌ی $\frac{x-1}{x+1} > 2x$ کدام مجموعه است؟

(۱) $\{x : x < -1\}$ (۲) $\{x : x > -1\}$ (۳) $\{x : -1 < x < 1\}$ (۴) $\{x : -2 < x < -1\}$

(سراسری ۸۸)

۲۸- نمودار تابع $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ ، در بازه‌ی (a, b) زیر محور x هاست. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۹- اگر برای هر x از بازه‌ی (a, b) نامعادله‌ی $\sqrt{x+5} > 1 + \sqrt{8-x}$ برقرار باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

(۱) $5 + \sqrt{2}$ (۲) ۱۳ (۳) ۹ (۴) ۴

(سراسری ۹۱)

۳۰- اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

(۱) \mathbb{R} (۲) $\{a : a < 1\}$ (۳) \emptyset (۴) $\{a : 1 < a < 5\}$



کنکور ۹۷، ۹۸، ۹۹

(سراسری تهرمی فارغ از کشور ۹۸)

۳۱- مجموعه جواب نامعادله $\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$ به صورت بازه، کدام است؟

- (۱) $(-4, 2) \cup (2, 1)$ (۲) $(2, 4)$ (۳) $(-1, 2) \cup (2, 4)$ (۴) $(-1, 2)$

۳۲- در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^4$ است. بیشترین مقدار $b-a$ ، کدام است؟ (سراسری تهرمی فارغ از کشور ۹۹)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ گزینه‌ای تست‌ها

شماره تست	گزینه درست	شماره تست	گزینه درست	شماره تست	گزینه درست	شماره تست	گزینه درست
۱	۴	۳۱	۳	۲۱	۳	۱۱	۱
۲	۲	۳۲	۲	۲۲	۴	۱۲	۲
۳	۱			۲۳	۳	۱۳	۱
۴	۳			۲۴	۳	۱۴	۳
۵	۲			۲۵	۴	۱۵	۲
۶	۴			۲۶	۴	۱۶	۴
۷	۳			۲۷	۱	۱۷	۴
۸	۴			۲۸	۲	۱۸	۳
۹	۴			۲۹	۴	۱۹	۳
۱۰	۳			۳۰	۳	۲۰	۴